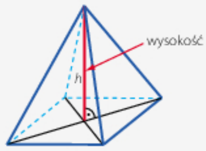
9.4. OSTROSŁUPY

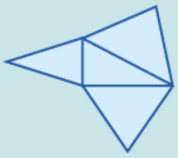
9.4.1. OKREŚLENIE OSTROSŁUPA

Ostrosłup – wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.

Wysokość ostrosłupa – odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy (spodek wysokości).

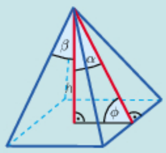


9.4.2. RODZAJE OSTROSŁUPÓW

Rodzaj ostrosłupa	Siatka	Wzór na objętość V i pole powierzchni całkowitej P
h – wysokość ostrosłupa, P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej		
Ostrosłup prosty – wszystkie krawędzie boczne mają tę samą długość.		$V=\frac{1}{3}P_p\cdot h$ $P=P_p+P_b$
Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny. Ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi. Spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. Krawędzie boczne są nachylone pod tym samym kątem do podstawy.		$V=\frac{1}{3}P_p\cdot h$ $P=P_p+P_b$
Czworościan foremny – ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.		$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $P=a^2\sqrt{3}$

9.4.3. ODCINKI I KĄTY W OSTROSŁUPACH

α – kąt między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną
β – kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
φ – kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy



9

ało

ia
ów

Wyrażenie jest trójmianem kwadratowym o współczynniku $a>0$, zatem przyjmuje wartość najmniejszą dla $x_w=\frac{150}{120}=\frac{5}{4}$, czyli wartość ta wynosi $W\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{125}{4}=31{,}25$.

IV. Funkcje i ich własności

TEST WSTĘPNY

W zadaniach 1.–2. zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

1. Dana jest funkcja $f(x)=x^2-4x$. Wskaż poprawne odpowiedzi. 1 pkt

A. Zbiorem wartości tej funkcji jest $(-4, +\infty)$.

B. Zbiorem wartości tej funkcji jest $\langle -4, +\infty)$.

C. Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji poprowadzonej w punkcie $x=-3$ jest równy (-10).

D. Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$.

2. Wykres funkcji $f(x)=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$ jest nachylony do osi OX pod kątem α takim, że: 1 pkt

A. $\alpha=30^\circ$ B. $\alpha=60^\circ$ C. $\alpha=120^\circ$ D. $\alpha=150^\circ$

3. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m tak, aby dziedziną funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+3}}$ był zbiór liczb rzeczywistych. Podaj największą liczbę całkowitą m_0 należącą do tego zbioru. Oblicz z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku przybliżenie liczby $m_0\sqrt{5}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego tego przybliżenia. 1 pkt

4. a) Narysuj wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & \text{dla } x\in(0, 2)\\ -1 & \text{dla } x\in\langle 2, 4\rangle\\ \frac{1}{2}x-3 & \text{dla } x\in(4, +\infty)\end{cases}$. 4 pkt

b) Narysuj wykres funkcji $g(x)=|f(x)|$.

c) Podaj zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)|=m$ ma dokładnie cztery rozwiązania.

5. Wykaż z definicji, że funkcja $f(x)=-x^2+6x$ jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, 3)$. 5 pkt

PODLICZ

	12 pkt		%

IV. FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI // 17

	Postęp: Zapisanie równania kwadratowego z parametrem: $mx^2-2x+4m=0$	1
	Istotny postęp: Rozważenie przypadku $m=0$: równanie ma postać: $-2x=0$, więc ma rozwiązanie	2

	$x \in \left(\frac{}{12}\pi + k\pi, \frac{}{12}\pi + k\pi\right) \cup \left(\frac{}{12}\pi + k\pi, \frac{}{12}\pi + k\pi\right)$	
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie części wspólnej z przedziałem $\langle 0, 2\pi\rangle$ i zapisanie rozwiązania: $x \in \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\right)$	3

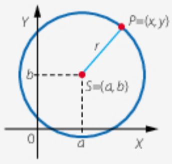
8.5. RÓWNANIE OKRĘGU

8.5.1. RÓWNANIE OKRĘGU W POSTACI KANONICZNEJ

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ – postać kanoniczna równania okręgu
$S=(a,b)$ – środek okręgu
r $(r>0)$ – promień okręgu

$x^2+y^2=r^2$ – równanie okręgu o środku w punkcie $(0,0)$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2$ – równanie koła o środku w punkcie (a,b) i promieniu r



PRZYKŁAD

Równanie okręgu o środku $S=(-3,2)$ i promieniu $r=3$:
$(x+3)^2+(y-2)^2=9$

8.5.2. RÓWNANIE OKRĘGU W POSTACI OGÓLNEJ

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, gdzie $c=a^2+b^2-r^2$ i $a^2+b^2-c>0$
– postać ogólna równania okręgu o środku $S=(a,b)$ i promieniu r, gdzie $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

PRZYKŁAD

Okrąg jest opisany równaniem ogólnym $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. Wtedy:
$a=1$, $b=-2$, $c=1$, $r=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$
Równanie okręgu w postaci kanonicznej: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

8.6. WEKTORY

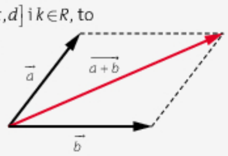
Jeśli $A=(x_1,y_1)$ i $B=(x_2,y_2)$, to
współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są równe $\overrightarrow{AB}=[x_2-x_1,y_2-y_1]$,
długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Wektor **przeciwny** do wektora $\overrightarrow{AB}=[a,b]$ to wektor $\overrightarrow{BA}=[-a,-b]$

Działania na wektorach

Jeśli $\vec{w}=[a,b]$, $\vec{u}=[c,d]$ i $k\in R$, to

$\vec{w}+\vec{u}=[a+c,b+d]$



$\vec{w}-\vec{u}=[a-c,b-d]$
$k\cdot\vec{w}=[ka,kb]$

8

	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie długości odcinków: $\lvert AB\rvert=\sqrt{40}$, $\lvert CD\rvert=\sqrt{160}$ i obliczenie skali jednokładności uwzględniając, że skala jest dodatnia: $k=2$	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie współrzędnych środka jednokładności: $S=(0,6)$	4 (3 pkt, jeśli przy dobrej metodzie popełniono błąd rachunkowy)
15.	Rozwiązanie: Wprowadzamy oznaczenia: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' SD – wysokość ściany bocznej BCE – otrzymany przekrój $\lvert\angle SAS'\rvert=\alpha$, $\lvert\angle EDA\rvert=\frac{\alpha}{2}$ Rozpatrujemy trójkąt ADE: $\lvert\angle AED\rvert=180^\circ-\alpha-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\lvert\angle AED\rvert=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha$, $\lvert AD\rvert=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ Korzystamy z twierdzenia sinusów w tym trójkącie $\frac{\lvert AD\rvert}{\sin\left[180^\circ-\frac{3}{2}\alpha\right]}=\frac{\lvert DE\rvert}{\sin\alpha}$, stąd: $\lvert ED\rvert=\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin\frac{3}{2}\alpha}$ Obliczamy pole przekroju $P_{BCE}=\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin\frac{3}{2}\alpha}\Rightarrow P_{BCE}=\frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$	0–4
	Istotny postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $ABCS$ – dany ostrosłup o wierzchołku S i spodku wysokości S' SD – wysokość ściany bocznej BCE – otrzymany przekrój $\lvert\angle SAS'\rvert=\alpha$, $\lvert\angle EDA\rvert=\frac{\alpha}{2}$	1
	Istotny postęp: Zapisanie danych dla trójkąta ADE: $\lvert\angle AED\rvert=180^\circ-\frac{3}{2}\alpha$, $\lvert AD\rvert=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie wysokości przekroju: $\lvert ED\rvert=\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin\frac{3}{2}\alpha}$	3
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie pola przekroju: $P_{BCE}=\frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$	4
16.	Rozwiązanie: A – wylosowanie kuli białej z losowo wybranej urny po rozmieszczeniu białych kul B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie urny I, wylosowanie urny II n – liczba kul białych dołożonych do urny I, $n\in\{0,1,2,3\}$ $P(A/B_1)=\frac{n}{7+n}, P(A/B_2)=\frac{3-n}{6-n}$ $P(B_1)=\frac{1}{2}$, $P(B_2)=\frac{1}{2}$ $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3-n}{6-n}=\frac{6n-n^2+3n+21-7n-n^2}{2(n+7)(6-n)}=\frac{-2n^2+2n+21}{2(n+7)(6-n)}$ Zapisujemy równanie: $\frac{-2n^2+2n+21}{2(n+7)(6-n)}=\frac{17}{72}$ Rozwiązujemy równanie: $(n=2\vee n=-\frac{21}{55})\wedge n\in\{0,1,2,3\}\Rightarrow n=2$	0–4

3

3.4. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

3.4.1. RÓWNANIE KWADRATOWE

Równanie postaci $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$ i $a,b,c\in R$, to równanie **kwadratowe**.
Liczby a,b,c – **współczynniki** równania.

Jeśli $a\neq 0, b\neq 0$ i $c\neq 0$, to równanie nazywamy **zupełnym**.
Jeśli $a\neq 0$ i $b=0$ lub $a\neq 0$ i $c=0$ lub $a\neq 0$, $b=0$ i $c=0$, to równanie nazywamy **niezupełnym**.

Pierwiastek równania kwadratowego – liczba, która spełnia równanie.
Rozwiązanie równania kwadratowego jest miejscem zerowym funkcji $y=ax^2+bx+c$.

Wyróżnik równania kwadratowego: $\Delta=b^2-4ac$.
Rozwiązując równanie zupełne, należy obliczyć wyróżnik równania. Równanie kwadratowe niezupełne można rozwiązać bez obliczania wyróżnika.

3.4.2. LICZBA ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA KWADRATOWEGO

PIERWIASTKI RÓWNANIA KWADRATOWEGO ZUPEŁNEGO $ax^2+bx+c=0$, GDZIE $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Dwa pierwiastki $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Jeden pierwiastek $x=-\frac{b}{2a}$	Nie ma pierwiastków.

PRZYKŁADY

$x^2+x-6=0$
$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25>0$
$x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=-3,$
$x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=2$

$2x^2+4x+2=0$
$\Delta=4^2-4\cdot 2\cdot 2=0$
$x=-\frac{4}{2\cdot 2}=-1$

$2x^2-x+1=0$
$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$
Nie ma rozwiązania.

PIERWIASTKI RÓWNANIA KWADRATOWEGO NIEZUPEŁNEGO

<table>
<tr><td>Postać równania</td><td>$ax^2=0$
$(a\neq 0, b=0$ i $c=0)$</td><td>$ax^2+bx=0$
$(a\neq 0, b\neq 0$ i $c=0)$</td><td colspan="2">$ax^2+c=0$
$(a\neq 0, b=0$ i $c\neq 0)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rozwiązanie</td><td rowspan="2">Jeden pierwiastek
$x=0$</td><td rowspan="2">Dwa pierwiastki
$x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$</td><td>dla $-\frac{c}{a}>0$</td><td>dla $-\frac{c}{a}<0$</td></tr>
<tr><td>Dwa pierwiastki
$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$,
$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$</td><td>Nie ma rozwiązania.</td></tr>
</table>

3.4.3. WZORY VIÈTE'A

Jeśli $a\neq 0$ i $\Delta>0$, to równanie kwadratowe $ax^2+bc+c=0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2, dla których prawdziwe są wzory

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ – suma pierwiastków

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ – iloczyn pierwiastków

na stronie 334

a
ów

$m\in\left(\frac{\ldots}{4},-\frac{\ldots}{8}\right)\cup\left(0,\frac{\ldots}{4}\right)$

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
18.	Rozwiązanie: Wprowadzamy oznaczenia: $ABCD$ – dany prostokąt $\|AB\| = x, \|BC\| = y$ Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa: $4R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ Wyznaczamy pole prostokąta: $P = xy \Rightarrow P(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D = (0, 2R)$, zatem $P(x) = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$ Wprowadzamy funkcję pomocniczą $f(x) = 4R^2x^2 - x^4$ $f'(x) = 8R^2x - 4x^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8R^2x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = R\sqrt{2} \vee x = -R\sqrt{2}$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, R\sqrt{2}\right) \wedge f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(R\sqrt{2}, 2R\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $\left(0, R\sqrt{2}\right)$ i maleje w przedziale $\left(R\sqrt{2}, 2R\right)$, więc w punkcie $x = R\sqrt{2}$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji Funkcji $f(x)$, więc również funkcji $P(x)$ $P\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$	0–7
	I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej pole czworokąta Zapisanie zależności między bokami prostokąta $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$	1
	Wyznaczenie wzoru na pole prostokąta: $P(x) = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$	1
	Zapisanie dziedziny funkcji: $x \in (0, 2R)$	1
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji pomocniczej $f'(x) = 8R^2x - 4x^3$	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $x = R\sqrt{2}$	1
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego minimum funkcji: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, R\sqrt{2}\right) \wedge f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(R\sqrt{2}, 2R\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $\left(0, R\sqrt{2}\right)$ i maleje w przedziale $\left(R\sqrt{2}, 2R\right)$, więc w punkcie $x = R\sqrt{2}$ funkcja osiąga maksimum będące największą wartością funkcji f, więc również funkcji P	1
	III część: Wyznaczenie największej wartości funkcji: $P\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$	1