# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
# Z NOWĄ ERĄ 2016/2017

# MATEMATYKA
## POZIOM PODSTAWOWY

## ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*

**Zadanie 1. (0–1)**

| **Wymagania ogólne** | **Wymagania szczegółowe** | **Poprawna odpowiedź** |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.3. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. | **D** |

**Zadanie 2. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 1.4. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.<br>2.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. | **B** |

**Zadanie 3. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.9. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok). | **C** |

**Zadanie 4. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.9. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykonuje obliczenia procentowe. | **C** |

**Zadanie 5. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.3. Funkcje.<br>Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą). | **B** |

**Zadanie 6. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4.1. Funkcje.<br>Zdający określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego. | **D** |

**Zadanie 7. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.4. Funkcje.<br>Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$. | **A** |

**Zadanie 8. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.6. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. | **D** |

**Zadanie 9. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 4.7. Funkcje.<br>Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. | **B** |

**Zadanie 10. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.10. Funkcje.<br>Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). | **B** |

**Zadanie 11. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | 4.13. Funkcje.<br>Zdający szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego $a$, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. | **C** |

**Zadanie 12. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 5.1. Ciągi.<br>Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. | **D** |

**Zadanie 13. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 3.5 Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.<br>5.1. Ciągi.<br>Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. | **A** |

**Zadanie 14. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 5.2. Ciągi.<br>Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. | **D** |

**Zadanie 15. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 6. Trygonometria. Zdający:<br>1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;<br>4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. | **C** |

**Zadanie 16. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 7.1. Planimetria.<br>Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. | **B** |

**Zadanie 17. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 7.4. Planimetria.<br>Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. | **C** |

**Zadanie 18. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka. | **A** |

**Zadanie 19. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | GIMNAZJUM<br>10. Figury płaskie. Zdający:<br>7) stosuje twierdzenie Pitagorasa,<br>9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów. | **C** |

**Zadanie 20. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | GIMNAZJUM<br>6.2. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych. | **D** |

**Zadanie 21. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania. | **C** |

**Zadanie 22. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. | **B** |

**Zadanie 23. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. | **C** |

**Zadanie 24. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 4.12. Funkcje.<br>Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretowania zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).<br>GIMNAZJUM<br>7.6. Równania.<br>Zdający rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**

Z warunków zadania wnioskujemy, że funkcja $f$ jest stała. Zatem współczynniki przy zmiennej muszą być równe 0. Otrzymujemy do rozwiązania układ równań: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = -2a \\ a - 2a = 4 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} b = 8 \\ a = -4 \end{cases}$.

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

gdy zapisze układ równań $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$

**Zdający otrzymuje** ........................................ **2 pkt**

gdy obliczy $\begin{cases} b = 8 \\ a = -4 \end{cases}$

**<u>II sposób</u>**

$f(0) = -7$

$f(-1) = 2a + b - a - b + 4 - 7 = a - 3$, skąd wynika, że $a - 3 = -7$, czyli $a = -4$.

$f(1) = 2a + b + a + b - 4 - 7 = 3a + 2b - 11 = 3 \cdot (-4) + 2b - 11 = 2b - 23$, skąd wynika, że $2b - 23 = -7$, czyli $b = 8$.

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

gdy wyznaczy wartość funkcji $f$ dla trzech różnych wartości $x$ w celu ich porównania.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **2 pkt**

gdy obliczy wartości $a$ i $b$: $a = -4$ i $b = 8$.

**Zadanie 25. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3.5. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.<br>4.2 Funkcje.<br>Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Obliczamy wartości funkcji $f(0)=4(a+1)$, $f(1)=2(a+1)$, a następnie zapisujemy nierówność $4(a+1)\cdot 2(a+1)\leqslant 16$.

Rozwiązujemy nierówność kwadratową $(a+1)^2\leqslant 2$.

Stąd otrzymujemy $-1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{2}$.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................ **1 pkt**

gdy wyznaczy wartości funkcji $f(0)=4(a+1)$, $f(1)=2(a+1)$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................ **2 pkt**

gdy poda odpowiedź: $-1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{2}$.

**Zadanie 26. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^2$ oraz $a^2-b^2$.<br>GIMNAZJUM<br>6.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech liczby $a$ i $b$ będą dowolnymi liczbami parzystymi, tzn. $a=2k$, $b=2l$, gdzie $k$ i $l$ są liczbami całkowitymi. Zapisujemy wyrażenie z treści zadania, a następnie je przekształcamy:

$$(a-b)^2+a^2-b^2=a^2-2ab+b^2+a^2-b^2=2a(a-b)=2\cdot 2k\cdot(2k-2l)=8k(k-l).$$

Ponieważ różnica liczb całkowitych i ich iloczyn są liczbami całkowitymi, zapisana liczba jest podzielna przez 8.

**Uwaga**

Zdający nie musi podstawiać $a=2k$, $b=2l$. Wystarczy, że dla postaci $2a(a-b)$ zapisze, że różnica liczb parzystych jest liczbą parzystą, a iloczyn trzech liczb parzystych jest podzielny przez 8, zaś dla postaci $2a^2-2ab$ zapisze, że iloczyn trzech liczb parzystych jest podzielny przez 8 i różnica liczb podzielnych przez 8 jest podzielna przez 8.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**

- gdy zapisze liczbę $(a-b)^2+a^2-b^2$ i przekształci ją do postaci $2a^2-2ab$ albo $2a(a-b)$

albo

- gdy zapisze liczbę $(2k-2l)^2-(2k)^2-(2l)^2$ i przekształci ją do postaci $8k(k-l)$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**

gdy uzasadni, że ta liczba jest podzielna przez 8.

**Zadanie 27. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | GIMNAZJUM<br>10.5. Figury płaskie.<br>Zdający oblicza długość okręgu i łuku okręgu.<br>SZKOŁA PODSTAWOWA<br>9.2. Wielokąty, koła, okręgi.<br>Zdający ustala możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Oznaczmy przez $L_a$ długość okręgu o średnicy $a$, przez $L_b$ – długość okręgu o średnicy $b$ oraz przez $L_c$ – długość okręgu o średnicy $c$. Ze wzoru na długość okręgu otrzymujemy:

$L_a+L_b=\pi a+\pi b=\pi(a+b)$, $L_c=\pi c$. Ponieważ z nierówności trójkąta zachodzi nierówność $a+b>c$, więc $\pi(a+b)>\pi c$, czyli $L_a+L_b>L_c$, co należało dowieść.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**

gdy zapisze nierówność: $\pi a+\pi b>\pi c$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**

gdy uzasadni prawdziwość nierówności, powołując się na nierówność trójkąta (warunek budowy trójkąta).

**Zadanie 28. (0–2)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7.1. Planimetria.<br>Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.<br>6.2. Trygonometria.<br>Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora). |

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**

Z podanego stosunku łuków wynika, że miara najmniejszego kąta środkowego jest równa $\frac{4}{10+6+4}\cdot 360^\circ = \frac{1}{5}\cdot 360^\circ = 72^\circ$. Zatem szukany kąt trójkąta, jako kąt wpisany oparty na tym samym łuku, ma miarę 36°. Z tablic odczytujemy: $\cos 36^\circ = 0{,}8090$.

**II sposób**

Wyznaczamy wszystkie kąty środkowe: $\frac{4}{20}\cdot 360^\circ = 72^\circ$, $\frac{6}{20}\cdot 360^\circ = 108^\circ$, $\frac{10}{20}\cdot 360^\circ = 180^\circ$ oraz zauważamy, że trójkąt jest prostokątny. Środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego tworzy z przeciwprostokątną kąty 72° i 108°. Najmniejszy kąt trójkąta jest równy $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Z tablic odczytujemy: $\cos 36^\circ = 0{,}8090$.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

gdy wyznaczy miarę najmniejszego kąta w trójkącie: 36°.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **2 pkt**

gdy poda $\cos 36^\circ = 0{,}8090$.

**Zadanie 29. (0–3)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7.2. Planimetria.<br>Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.<br>8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:<br>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;<br>5) wyznacza współrzędne środka odcinka. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $P$ i $Q$:
$a_{PQ} = \frac{9-5}{8-4} = 1$ oraz środek odcinka $PQ$: $S = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$. Szukana prosta jest prostopadła do prostej $PQ$, więc jej równanie jest postaci $y = -x + b$. Uwzględniając fakt, że szukana oś symetrii przechodzi przez $S$, otrzymujemy $7 = -6 + b$, skąd $b = 13$. Równanie szukanej prostej: $y = -x + 13$.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

- gdy wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej $PQ$: $a_{PQ} = 1$

albo

- gdy wyznaczy współrzędne środka odcinka $PQ$: $S = (6, 7)$

albo

- gdy napisze, że szukaną osią symetrii figury jest symetralna odcinka $PQ$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**

- gdy napisze, że szukaną osią symetrii figury jest symetralna odcinka $PQ$ i wyznaczy jej współczynnik kierunkowy $(-1)$

albo

- gdy wyznaczy współrzędne środka odcinka $PQ$ $(S=(6,7))$ oraz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do $PQ$ $(-1)$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **3 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i poda równanie szukanej prostej: $y=-x+13$.

**Zadanie 30. (0–4)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający:<br>2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;<br>3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**

Zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega$ jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych trzycyfrowych. Zatem $|\Omega|=900$. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby parzystej zapisanej za pomocą co najmniej jednej cyfry 4. Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych jest 450. Liczb parzystych, w zapisie których nie użyto cyfry 4 jest $8\cdot 9\cdot 4=288$ (bo na pierwszym miejscu może być jedna z ośmiu cyfr 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, na drugim miejscu nie może być tylko 4, na trzecim miejscu zaś mogą być użyte cyfry 0, 2, 6, 8). Zatem liczb parzystych z co najmniej jedną cyfrą 4 jest $450-288=162$. Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe $P(A)=\frac{162}{900}=\frac{9}{50}$.

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........................................................................................................ **1 pkt**

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych: 900

albo

- zapisze liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych: 450

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........................................................................ **2 pkt**

Zdający poda liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych (900) albo zapisze liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych (450) oraz obliczy, ile jest liczb trzycyfrowych parzystych zapisanych bez użycia cyfry 4 $(8\cdot 9\cdot 4=288)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........................................ **3 pkt**

Zdający poda liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych (900) oraz obliczy liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych zapisanych z użyciem co najmniej jednej cyfry 4 ($450-288=162$) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ........................................ **4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A)=\frac{9}{50}$.

__II sposób__

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu, czyli liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych od 100 do 999: $|\Omega|=900$. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu koperty oznaczonej trzycyfrową liczbą parzystą z co najmniej jedną cyfrą 4.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe postaci $abc$, gdzie $a$ jest cyfrą setek, $b$ – cyfrą dziesiątek, $c$ – cyfrą jedności.

Obliczamy, ile jest liczb parzystych trzycyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie jedna cyfra 4. Może ona wystąpić na miejscu pierwszym, drugim albo trzecim.

Liczb postaci $4bc$ jest $9\cdot 4$, postaci $a4c$ jest $8\cdot 4$, zaś postaci $ab4$ jest $8\cdot 9$, co daje łącznie 140 liczb.

Podobnie obliczamy, ile jest liczb parzystych trzycyfrowych, w zapisie których występują dokładnie dwie cyfry 4. Może ona nie wystąpić na miejscu pierwszym, drugim albo trzecim.

Liczb postaci $a44$ jest 8, postaci $4b4$ jest 9, zaś postaci $44c$ jest 4, co daje łącznie 21 liczb.

Uwzględniając jeszcze liczbę 444, otrzymujemy liczbę kopert spełniających podane warunki: $140+21+1=162$.

Stąd $P(A)=\frac{162}{900}=\frac{9}{50}$.

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........................................ **1 pkt**

Zdający

- poda liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych: 900

albo

- zapisze, że należy obliczyć, ile jest parzystych liczb trzycyfrowych w każdym z rozłącznych zbiorów: liczb zapisanych z użyciem dokładnie jednej cyfry 4, liczb zapisanych z użyciem dokładnie dwóch cyfr 4 oraz trzech czwórek (liczba 444)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........................................ **2 pkt**

- poda liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych (900) oraz obliczy, ile wśród nich jest liczb parzystych zapisanych z użyciem dokładnie jednej cyfry 4 lub z użyciem dokładnie dwóch cyfr 4, tzn. zapisze $9\cdot 4+8\cdot 4+8\cdot 9$ lub $8+9+4$,

albo

- zapisze, że należy obliczyć, ile jest parzystych liczb trzycyfrowych w każdym z rozłącznych zbiorów: liczb zapisanych z użyciem dokładnie jednej cyfry 4, liczb zapisanych z użyciem dokładnie dwóch cyfr 4 oraz trzech czwórek (liczba 444), a następnie policzy, ile jest liczb w jednym z tych zbiorów ($9\cdot 4+8\cdot 4+8\cdot 9$ lub $8+9+4$),

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........................................ **3 pkt**

Zdający poda liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych (900) oraz obliczy, ile jest liczb, w których występuje co najmniej jedna czwórka: $(9 \cdot 4+8 \cdot 4+8 \cdot 9) + (8+9+4)+1=162$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ........................................ **4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{9}{50}$.

**Uwagi**

1. Zadanie może być rozwiązane przez wypisanie wszystkich liczb trzycyfrowych i zaznaczenie wszystkich z czwórkami.

2. Jeżeli zdający obliczy $P(A) = \frac{162}{900}$ lub $P(A) = \frac{81}{450}$ i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje **3 punkty**.

3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $A$ pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 899 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.

6. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 31. (0–5)**

| Wymaganie ogólne | Wymaganie szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 5.3. Ciągi.<br>Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Korzystamy ze wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + r = 1 \\ a_1 + 19r = 13 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$

Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy $a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$.

Wyznaczamy liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od 33.

$\frac{2}{3}n - \frac{1}{3} < 33$, stąd $n < 50$. Zatem liczba wyrazów ciąg mniejszych od 33 jest równa 49.

Obliczamy sumę szukanych wyrazów ciągu arytmetycznego, korzystając ze wzoru:

$$S_{49} = \frac{\frac{2}{3} + 48 \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot 49 = \frac{2401}{3}.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **1 pkt**

Zdający zapisze układ równań $\begin{cases} a_1 + r = 1 \\ a_1 + 19r = 13 \end{cases}$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **2 pkt**

Zdający zapisze rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **3 pkt**

Zdający zapisze wzór ogólny ciągu $(a_n)$: $a_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$ oraz zapisze nierówność $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} < 33$.

**Rozwiązanie prawie pełne** ........ **4 pkt**

Zdający rozwiąże nierówność $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} < 33$ i wywnioskuje, że 49 wyrazów ciągu jest mniejszych od 33.

**Rozwiązanie pełne** ........ **5 pkt**

Zdający obliczy sumę $S_{49} = \frac{2401}{3}$.

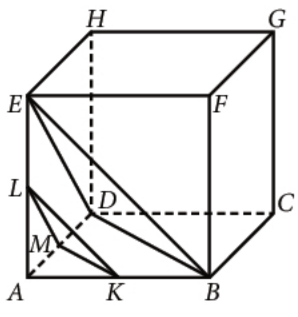
**Uwaga**

Jeśli zdający popełni błąd rachunkowy przy rozwiązywaniu układu równań lub nierówności, a dalej konsekwentnie prowadzi dalsze obliczenia to dostaje **4 punkty**.

**Zadanie 32. (0–5)**

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9.5. Stereometria.<br>Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.<br>GIMNAZJUM<br>11.2. Bryły.<br>Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym). |

**Przykładowe rozwiązanie**




Oznaczmy środki krawędzi *AB*, *AD* i *AE* odpowiednio przez *K*, *M* i *L*. W przekroju płaszczyzną *p* otrzymujemy trójkąt *KML*, a w przekroju płaszczyzną *q* trójkąt *BDE*.

Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe trójkątne $KMLA$ i $BDEA$ o wspólnym wierzchołku $A$ i wysokościach odpowiednio $h$ i $H$ opuszczonych na podstawy, które są trójkątami równobocznymi. Szukaną różnicę wysokości powstałych ostrosłupów oznaczmy przez $d = H - h$.

W celu wyznaczenia wysokości ostrosłupa zapisujemy objętość bryły na dwa sposoby:

$V_{BDEA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |AE| = \frac{1000}{6} = \frac{500}{3}$,

$V_{BDEA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|BD|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{(10\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{12} \cdot H = \frac{200\sqrt{3}}{12} \cdot H = \frac{50\sqrt{3}}{3} \cdot H$,

stąd $\frac{50\sqrt{3}}{3} \cdot H = \frac{500}{3}$, czyli $H = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Tym samym sposobem obliczamy wysokość drugiego ostrosłupa:

$V_{KMLA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AK| \cdot |AM| \cdot |AL| = \frac{125}{6}$,

$V_{KMLA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|KM|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{(5\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{12} \cdot h = \frac{50\sqrt{3}}{12} \cdot h = \frac{25\sqrt{3}}{6}$,

stąd $\frac{25\sqrt{3}}{6} \cdot h = \frac{125}{6}$, czyli $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Obliczamy różnicę wysokości ostrosłupów:

$d = H - h = \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

**Uwaga**

Aby obliczyć wysokość drugiego ostrosłupa, zdający może zastosować skalę podobieństwa.

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **1 pkt**

Zdający opisze ostrosłupy $KLMA$ i $BEDA$ jako prawidłowe.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **2 pkt**

Zdający zauważy, że ostrosłup $KLMA$ jest jednocześnie ostrosłupem o podstawie $AKM$ i wierzchołku $L$, którego objętość można obliczyć w inny sposób; to samo spostrzeżenie dotyczy ostrosłupa $BEDA$.

**Rozwiązanie, w którym jest postęp na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **3 pkt**

Zdający wyznaczy $H = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ albo $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **4 pkt**

Zdający wyznaczy wysokości obydwu ostrosłupów: $H = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ i $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

**Rozwiązanie pełne** ........ **5 pkt**

Zdający poprawnie wyznaczy różnicę wysokości ostrosłupów: $d = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym podczas obliczania $H$ lub $h$ przy poprawnej interpretacji geometrycznej, to za takie rozwiązanie może otrzymać **4 punkty**.