Logarytm dziesiętny – logarytm o podstawie 10.
Zapisujemy: $\log a$ (bez zapisywania podstawy).

PRZYKŁADY:

$\log 100 = 2$, bo $10^2 = 100$

Jeśli $\log x = -3$, to $x = 10^{-3} = 0{,}001$.

1.10.2. Własności logarytmu

Dla $a>0$ i $a\neq 1$ oraz $b>0$, $c>0$, $n\in N$

Własność	Przykłady
$\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$ $\log_9 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$
$a^{\log_a b} = b$	$4^{\log_4 5} = 5$
$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$	$\log_{2^5} 8 = \frac{1}{5}\log_2 8 = \frac{1}{5}\cdot 3 = \frac{3}{5}$
$\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_4 3 + \log_4 \frac{1}{3} = \log_4\left(3\cdot\frac{1}{3}\right) = \log_4 1 = 0$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$\log_7 28 - \log_7 4 = \log_7 \frac{28}{4} = \log_7 7 = 1$
$\log_a \left(b^n\right) = n\log_a b$	$\log_5\left(\sqrt{5}\right)^3 = 3\log_5 \sqrt{5} = 3\cdot\frac{1}{2} = 1{,}5$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2}$
$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$	$\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3}\log_8 64 = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3}$

)

,

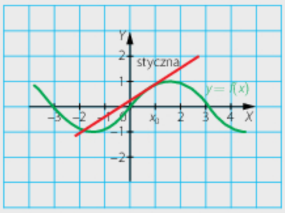
2,

ja
ów
2

$= 0{,}303703\ldots \approx 0{,}30$

11.3.3. Styczna do krzywej

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Styczna może mieć z wykresem funkcji więcej niż jeden punkt wspólny.

Kąt α między przecinającymi się wykresami funkcji: $y = f(x)$, $y = g(x)$ – kąt między stycznymi do tych krzywych, poprowadzonymi w punkcie ich przecięcia.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|f'(x_0) - g'(x_0)|}{|1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)|}$, gdy $1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0) \neq 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|a_1 - a_2|}{|1 + a_1\cdot a_2|}$, gdy $1 + a_1\cdot a_2 \neq 0$ a_1, a_2 – współczynniki kierunkowe stycznych

11.3.4. Wzory na obliczanie pochodnej

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	
$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$	$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$	$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$
$(a)' = 0$	$(ax + b)' = a$	$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$
$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11.3.5. Monotoniczność funkcji

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz dla każdego argumentu $x \in (a,b)$:
- $f'(x) > 0$, to funkcja f jest **rosnąca** w przedziale (a,b),
- $f'(x) < 0$, to funkcja f jest **malejąca** w przedziale (a,b),
- $f'(x) = 0$, to funkcja f jest **stała** w przedziale (a,b).

11.3.6. Ekstrema funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum
Jeżeli funkcja f osiąga ekstremum w punkcie x_0 i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0) = 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0, w którym $f(x_0) = 0$ oraz
- $f'(x) > 0$ dla $(x_0 - h, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $(x_0, x_0 + h)$, to funkcja f ma maksimum w punkcie x_0,
- $f'(x) < 0$ dla $(x_0 - h, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $(x_0, x_0 + h)$, to funkcja f ma minimum w punkcie x_0.

11

na stronie 413

Zatem: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} \geq 4 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 + 3\cdot 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$

5.3.3. Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny jest		
rosnący dla $a_1>0$ i $q>1$ lub $a_1<0$ i $0<q<1$.	malejący dla $a_1>0$ i $0<q<1$ lub $a_1<0$ i $q>1$.	stały dla $a_1\in R$ i $q=1$ lub $a_1=0$ i $q\in R$.
Ciąg geometryczny jest naprzemienny dla $a_1\neq 0$ i $q<0$.		

5.3.4. Szereg geometryczny

Szereg geometryczny – nieskończony ciąg sum częściowych ciągu geometrycznego (a_n):
$S_1=a_1$
$S_2=a_1+a_1q$
$S_3=a_1+a_1q+a_1q^2$
....
$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+...+a_1q^{n-1}$
....

Jeśli $|q|<1$ lub $a_1=0$, to szereg geometryczny jest zbieżny i jego suma wynosi $S=\frac{a_1}{1-q}$.

5

5.4. OPROCENTOWANIE WKŁADÓW

5.4.1. Pojęcia podstawowe

Kapitał – kwota złożona w banku.
Stopa procentowa – stała liczba procent, o który wzrasta kapitał.
Kapitalizacja odsetek (kapitalizacja) – dopisywanie odsetek do kapitału.
Okres kapitalizacji – czas, po jakim są dopisywane odsetki.
Dochód – różnica między kwotą końcową (powiększoną o odsetki) a kwotą początkową złożoną do banku.

5.4.2. Procent prosty

Procent prosty – sposób oprocentowania kapitału K polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu na następny okres.

Jeżeli kapitał K jest złożony do banku na rok, przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, to po roku wyniesie on $K+p\%\cdot K$.

Jeżeli kapitał K jest złożony do banku na n lat, przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po n latach wyniesie on $K_n=K+p\%\cdot K\cdot n$.
Liczby $K, K_1, K_2, ..., K_n$ tworzą ciąg arytmetyczny skończony o różnicy $r=p\%\cdot K$.

Jeżeli kapitał K jest złożony do banku na m miesięcy, przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po m miesiącach wyniesie on $K+p\%\cdot K\cdot\frac{m}{12}$.

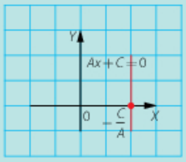
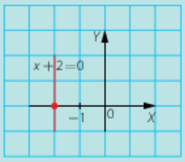
Jeżeli kapitał K jest złożony do banku na d dni, przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po d dniach wyniesie on $K+p\%\cdot K\cdot\frac{d}{365}$.

5.4.3. Procent składany

Procent składany – sposób oprocentowania kapitału K polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału i procentuje wraz z nim w następnym okresie.

356 | CIĄGI

	Zapisanie równania w postaci alternatywy: $\sin(\alpha-\beta)=0 \vee \sin(\alpha+\beta)=1$ Rozwiązanie pełne: Uzasadnienie tezy zadania: $\alpha=\beta \vee \alpha+\beta=90^\circ$, ponieważ α, β są kątami trójkąta.	4

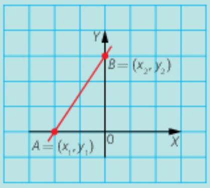
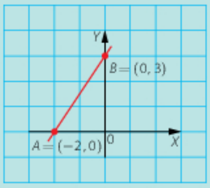
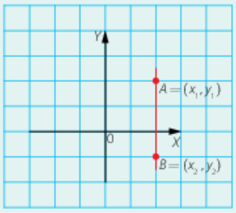
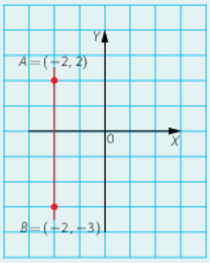
	Opis	Przykład
$Ax+By+C=0$ $A\neq 0$ lub $B\neq 0$ A,B,C – współczynniki liczbowe	$A\neq 0$ i $B=0$ 	

8.3.3. Równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) ma postać

$$y-y_1=a(x-x_1).$$

8.3.4. Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA RÓŻNE PUNKTY $A=(x_1,y_1)$ I $B=(x_2,y_2)$		
Dla $x_1\neq x_2$ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$	 Współczynnik kierunkowy prostej $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	 $y-0=\frac{3-0}{0-(-2)}\cdot(x+2)$ $y=\frac{3}{2}(x+2)$ $3x-2y+6=0$
Dla $x_1=x_2=k$ $x=k$		 $x=-3$

8.3.5. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

Warunki	Równania prostych	
	$y=a_1x+b_1$ $y=a_2x+b_2$	$A_1x+B_1y+C_1=0$ dla $A_1\neq 0$ lub $B_1\neq 0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$ dla $A_2\neq 0$ lub $B_2\neq 0$
równoległości	$a_1=a_2$	$A_1B_2-A_2B_1=0$
przecinania	$a_1\neq a_2$	$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$
prostopadłości	$a_1\cdot a_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

na stronie 385

h, H – odpowiednio wysokość trójkąta JED na podstawę JE (i jednocześnie wysokość trójkąta EKC na podstawę EK) oraz trapezu $ABCD$
G – punkt przecięcia prostych EF i AB

10.3.6. Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B)>0$, nazywamy liczbę $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, stąd $P(A/B)=P(A)$.

10.3.7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_n$, których prawdopodobieństwa są dodatnie, wykluczają się parami i ich suma jest zdarzeniem pewnym, to dla dowolnego zdarzenia losowego B zachodzi wzór $P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$.

10.4. KOMBINATORYKA

Pojęcie silni
$0!=1,\ \ 1!=1,\ \ n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ dla $n>1$

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy ciąg n-wyrazowy utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Liczba permutacji: $P_n=n!$.

Kombinacją n elementów spośród k elementów $(0\le k\le n)$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Liczba kombinacji: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Wariacją k-wyrazową **z powtórzeniami** zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru n-elementowego. Liczba wariacji z powtórzeniami: n^k.

Wariacją k-wyrazową **bez powtórzeń** zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg o różnych wyrazach ze zbioru n-elementowego. Liczba wariacji bez powtórzeń: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

10

na stronie 407

a
ów

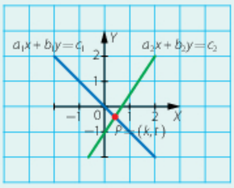
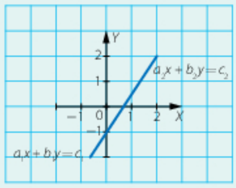
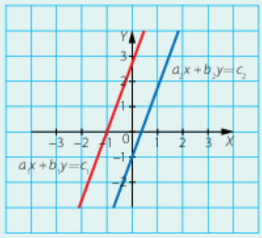
4

	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia: $A: P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{66}+\frac{4}{10}\cdot\frac{35}{66}+\frac{5}{10}\cdot\frac{21}{66}=\frac{5}{12}$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
17.	Rozwiązanie: $m+1\neq 0 \wedge \Delta>0 \Leftrightarrow m\neq -1 \wedge (2m-2)^2+8(m^2-1)>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)\setminus\{-1\}$ $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}<2 \Rightarrow \frac{x_2^3+x_1^3}{x_1^3x_2^3}<2 \Rightarrow \frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{(x_1x_2)^3}<2$ $\frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^3}<2 \Rightarrow \frac{\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)\left[\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)^2+6\frac{m-1}{m+1}\right]}{\left(\frac{-2m+2}{m+1}\right)^3}<2$ $\frac{10m^2-8m-2}{(m-1)^2}>-8 \Rightarrow 3m^2-4m+1>0 \Rightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ Wyznaczamy część wspólną wszystkich warunków i otrzymujemy: $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)\setminus\{-1\}$	0–5
	I część Zapisanie i rozwiązanie warunków istnienia dwóch różnych pierwiastków: $m+1\neq 0 \wedge \Delta>0 \Leftrightarrow m\neq -1 \wedge (2m-2)^2+8(m^2-1)>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)\setminus\{-1\}$	1 (za I część przyznaje się 1 pkt)
	II część Rozwiązanie warunku: suma odwrotności sześcianów pierwiastków jest mniejsza od dwóch. Zapisanie warunku w postaci: $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}<2 \Rightarrow \frac{x_2^3+x_1^3}{x_1^2x_2^3}<2 \Rightarrow \frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_xx_2+x_2^2)}{(x_1x_2)^3}<2$ $\Rightarrow \frac{(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^3}<2$	2
	Przekształcenie warunku do postaci: $\Rightarrow \frac{\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)\left[\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)^2+6\frac{m-1}{m+1}\right]}{\left(\frac{-2m+2}{m+1}\right)^3}<2$	3
	Rozwiązanie nierówności: $\frac{10m^2-8m-2}{(m-1)^2}>-8 \Rightarrow 3m^2-4m+1>0 \Rightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ III część Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań wszystkich warunków: $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)\setminus\{-1\}$	4 (za II część przyznaje się 3 pkt) 5 (za III część przyznaje się 1 pkt)

8.3.6. Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układ równań liniowych $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, gdzie $a_1^2+b_1^2\neq 0$ i $a_2^2+b_2^2\neq 0$, jest układem

oznaczonym (układem równań niezależnych), gdy ma jedno rozwiązanie.	**nieoznaczonym** (układem równań zależnych), gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.	**sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązania.
Geometryczną interpretacją układu są dwie przecinające się proste.  Rozwiązaniem układu są współrzędne punktu przecięcia prostych.	Geometryczną interpretacją układu są proste pokrywające się.  Rozwiązaniami są współrzędne punktów leżących na prostej.	Geometryczną interpretacją układu są dwie proste równoległe.  Układ równań nie ma rozwiązania.

8.3.7. Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P=(x_0, y_0)$ od prostej $Ax+By+C=0$ wyraża się wzorem

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

8.4. NIERÓWNOŚĆ LINIOWA Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Nierówność liniowa z dwiema niewiadomymi ma postać
$Ax+By+C>0$, $Ax+By+C\geq 0$, $Ax+By+C<0$ lub $Ax+By+C\geq 0$.

Jeśli $A^2+B^2\neq 0$, to nierówności

- $Ax+By+C>0$ i $Ax+By+C<0$ opisują płaszczyznę otwartą, której krawędzią jest prosta $Ax+By+C=0$
- $Ax+By+C\geq 0$ i $Ax+By+C\geq 0$ opisują płaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta $Ax+By+C=0$

Jeśli $A\neq 0$ i $B=0$, to nierówności

- $Ax+By+C>0$ ($Ax+By+C<0$) opisują płaszczyznę otwartą leżącą po prawej (lewej) stronie prostej $x=-\frac{C}{A}$
- $Ax+By+C\geq 0$ ($Ax+By+C\geq 0$) opisują płaszczyznę domkniętą leżącą po prawej (lewej) stronie prostej $x=-\frac{C}{A}$

na stronie 386

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego minimum funkcji: $d'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\wedge d'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right)$, zatem funkcja maleje w przedziale $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ i rośnie w przedziale $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right)$, więc w punkcie $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ funkcja osiąga minimum będące najmniejszą wartością funkcji	6 (za II część przyznaje się 3 pkt)
	III część Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji: $d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{4\cdot\frac{3}{2}+6\sqrt{\frac{3}{2}}+6}{5\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{6+4\sqrt{6}}{5}$	7 (za III część przyznaje się 1 pkt)