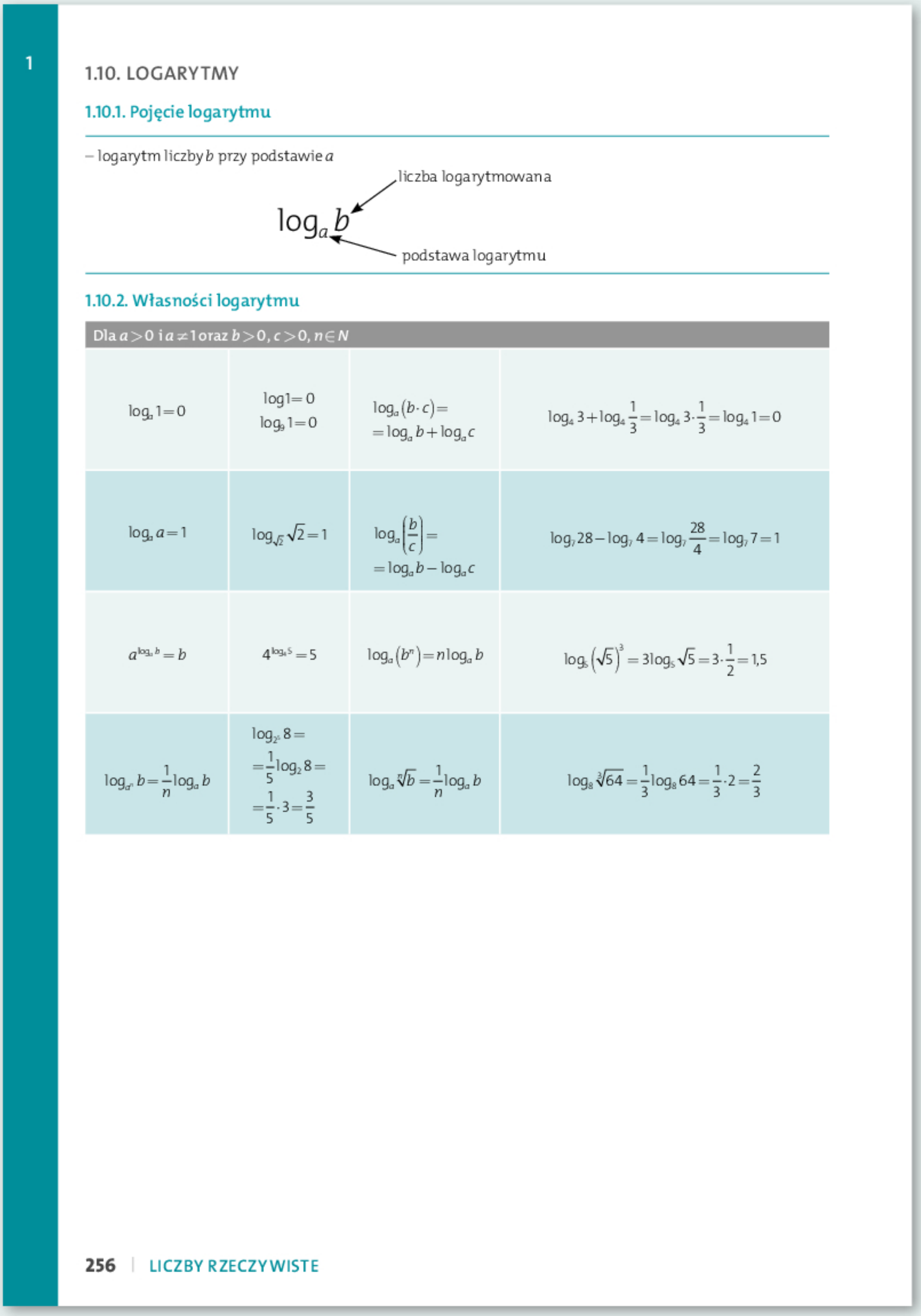


1

1.10. LOGARYTMY

1.10.1. Pojęcie logarytmu

– logarytm liczby *b* przy podstawie *a*

$\log_a b$

liczba logarytmowana

podstawa logarytmu

1.10.2. Własności logarytmu

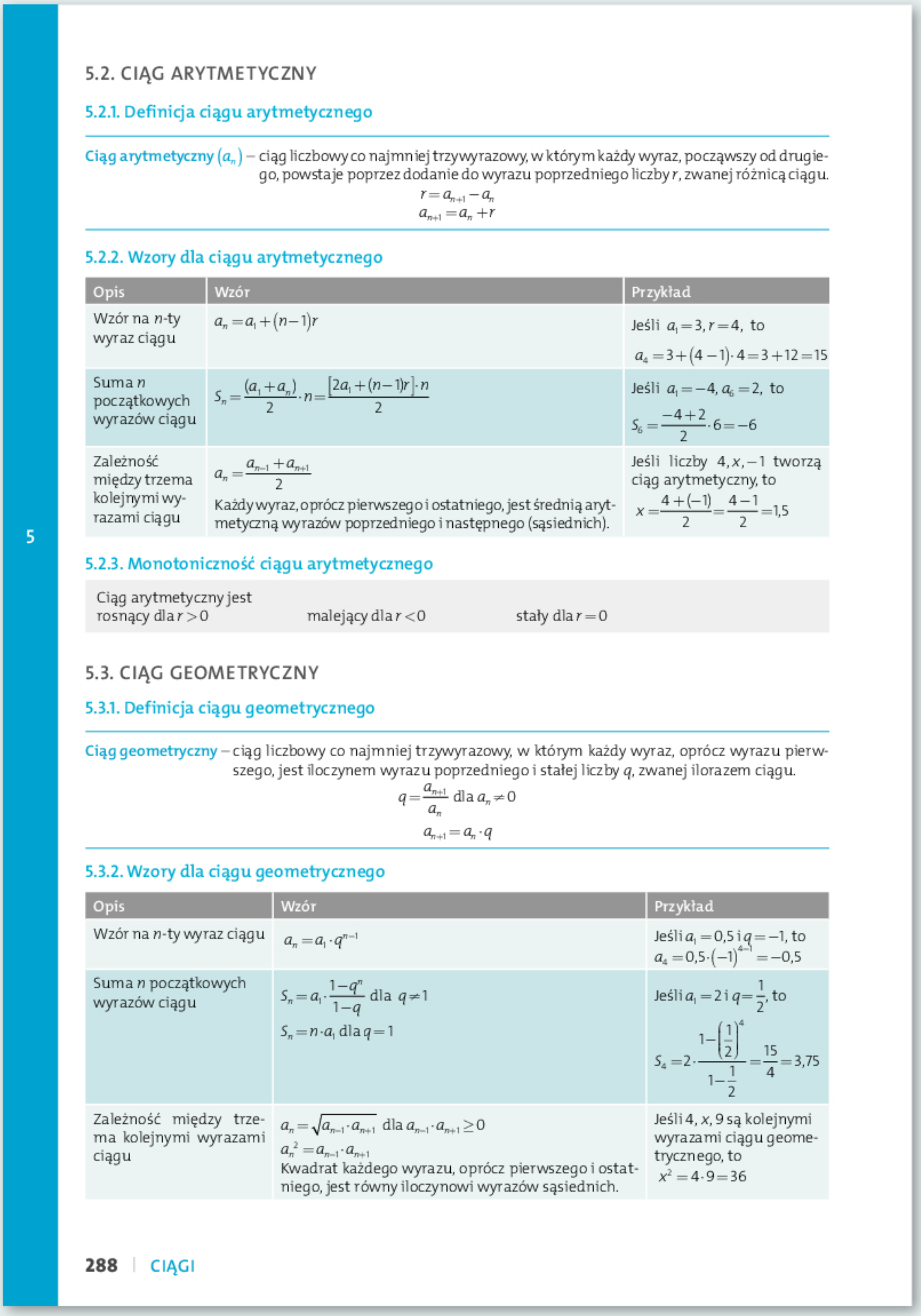
Dla $a>0$ i $a\neq 1$ oraz $b>0,\ c>0,\ n\in N$

$\log_a 1=0$	$\log 1=0$ $\log_9 1=0$	$\log_a(b\cdot c)=$ $=\log_a b+\log_a c$	$\log_4 3+\log_4\frac{1}{3}=\log_4 3\cdot\frac{1}{3}=\log_4 1=0$
$\log_a a=1$	$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=$ $=\log_a b-\log_a c$	$\log_7 28-\log_7 4=\log_7\frac{28}{4}=\log_7 7=1$
$a^{\log_a b}=b$	$4^{\log_4 5}=5$	$\log_a(b^n)=n\log_a b$	$\log_5\left(\sqrt{5}\right)^3=3\log_5\sqrt{5}=3\cdot\frac{1}{2}=1{,}5$
$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b$	$\log_{2^5} 8=$ $=\frac{1}{5}\log_2 8=$ $=\frac{1}{5}\cdot 3=\frac{3}{5}$	$\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$	$\log_8\sqrt[3]{64}=\frac{1}{3}\log_8 64=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$

256 | LICZBY RZECZYWISTE

		$m=3$
8.	D	Pierwiastkami są liczby: $-1, 2, 3$. Suma tych liczb jest równa 4.
9.	C	Wykresy funkcji $f(x)$ i $f(-x)$ są symetryczne względem osi OY. $g(-4)=0$ – najmniejsza wartość funkcji g w przedziale $\langle -4,-1\rangle$.

wyjaśnienie i więcej informacji
w vademecum maturalnym Wydawnictwa Operon



5

5.2. CIĄG ARYTMETYCZNY

5.2.1. Definicja ciągu arytmetycznego

Ciąg arytmetyczny (a_n) – ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje poprzez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.

$$r = a_{n+1} - a_n$$
$$a_{n+1} = a_n + r$$

5.2.2. Wzory dla ciągu arytmetycznego

Opis	Wzór	Przykład
Wzór na n-ty wyraz ciągu	$a_n = a_1 + (n-1)r$	Jeśli $a_1 = 3, r = 4$, to $a_4 = 3 + (4-1)\cdot 4 = 3 + 12 = 15$
Suma n początkowych wyrazów ciągu	$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}\cdot n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]\cdot n}{2}$	Jeśli $a_1 = -4, a_6 = 2$, to $S_6 = \frac{-4+2}{2}\cdot 6 = -6$
Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ Każdy wyraz, oprócz pierwszego i ostatniego, jest średnią arytmetyczną wyrazów poprzedniego i następnego (sąsiednich).	Jeśli liczby $4, x, -1$ tworzą ciąg arytmetyczny, to $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{4-1}{2} = 1{,}5$

5.2.3. Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Ciąg arytmetyczny jest
rosnący dla $r > 0$ malejący dla $r < 0$ stały dla $r = 0$

5.3. CIĄG GEOMETRYCZNY

5.3.1. Definicja ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny – ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, oprócz wyrazu pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i stałej liczby q, zwanej ilorazem ciągu.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ dla } a_n \neq 0$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

5.3.2. Wzory dla ciągu geometrycznego

Opis	Wzór	Przykład
Wzór na n-ty wyraz ciągu	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	Jeśli $a_1 = 0{,}5$ i $q = -1$, to $a_4 = 0{,}5\cdot(-1)^{4-1} = -0{,}5$
Suma n początkowych wyrazów ciągu	$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$ $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$	Jeśli $a_1 = 2$ i $q = \frac{1}{2}$, to $S_4 = 2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{15}{4} = 3{,}75$
Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	$a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$ dla $a_{n-1}\cdot a_{n+1} \geq 0$ $a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ Kwadrat każdego wyrazu, oprócz pierwszego i ostatniego, jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich.	Jeśli 4, x, 9 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $x^2 = 4\cdot 9 = 36$

288 | CIĄGI

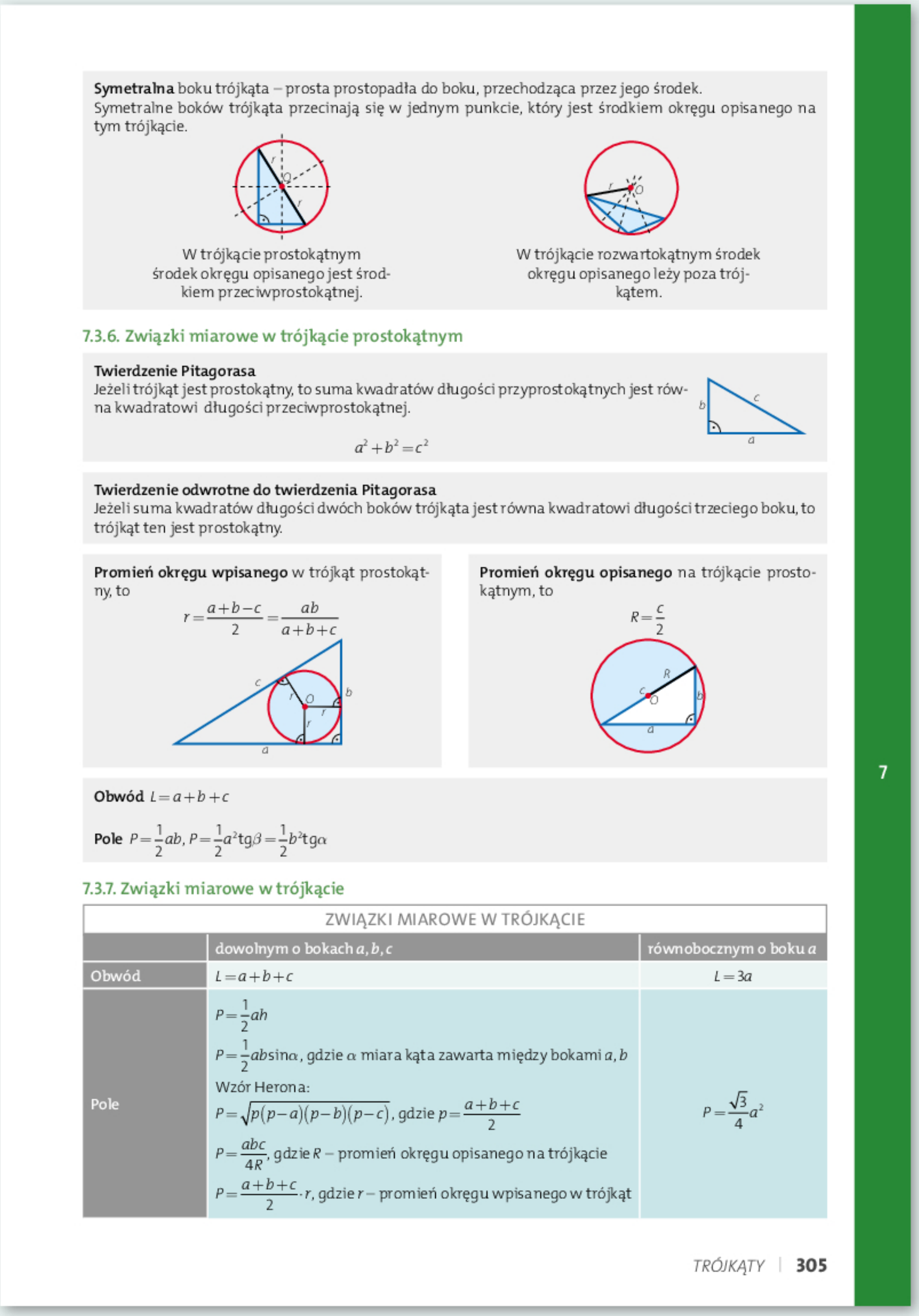
na stronie 288

u-

n

.

19.	A	$a \cdot aq \cdot aq^2 = (aq)^3 = 2^3 = 8$
20.	D	Długości boków trójkąta: 12, 5, 13. Naprzeciw kąta α leży bok długości 12, stąd $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$.



Symetralna boku trójkąta – prosta prostopadła do boku, przechodząca przez jego środek.
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

W trójkącie prostokątnym środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej.

W trójkącie rozwartokątnym środek okręgu opisanego leży poza trójkątem.

7.3.6. Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Twierdzenie Pitagorasa
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2+b^2=c^2$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, to

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, to

$$R=\frac{c}{2}$$

Obwód $L=a+b+c$

Pole $P=\frac{1}{2}ab$, $P=\frac{1}{2}a^2\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{2}b^2\mathrm{tg}\alpha$

7.3.7. Związki miarowe w trójkącie

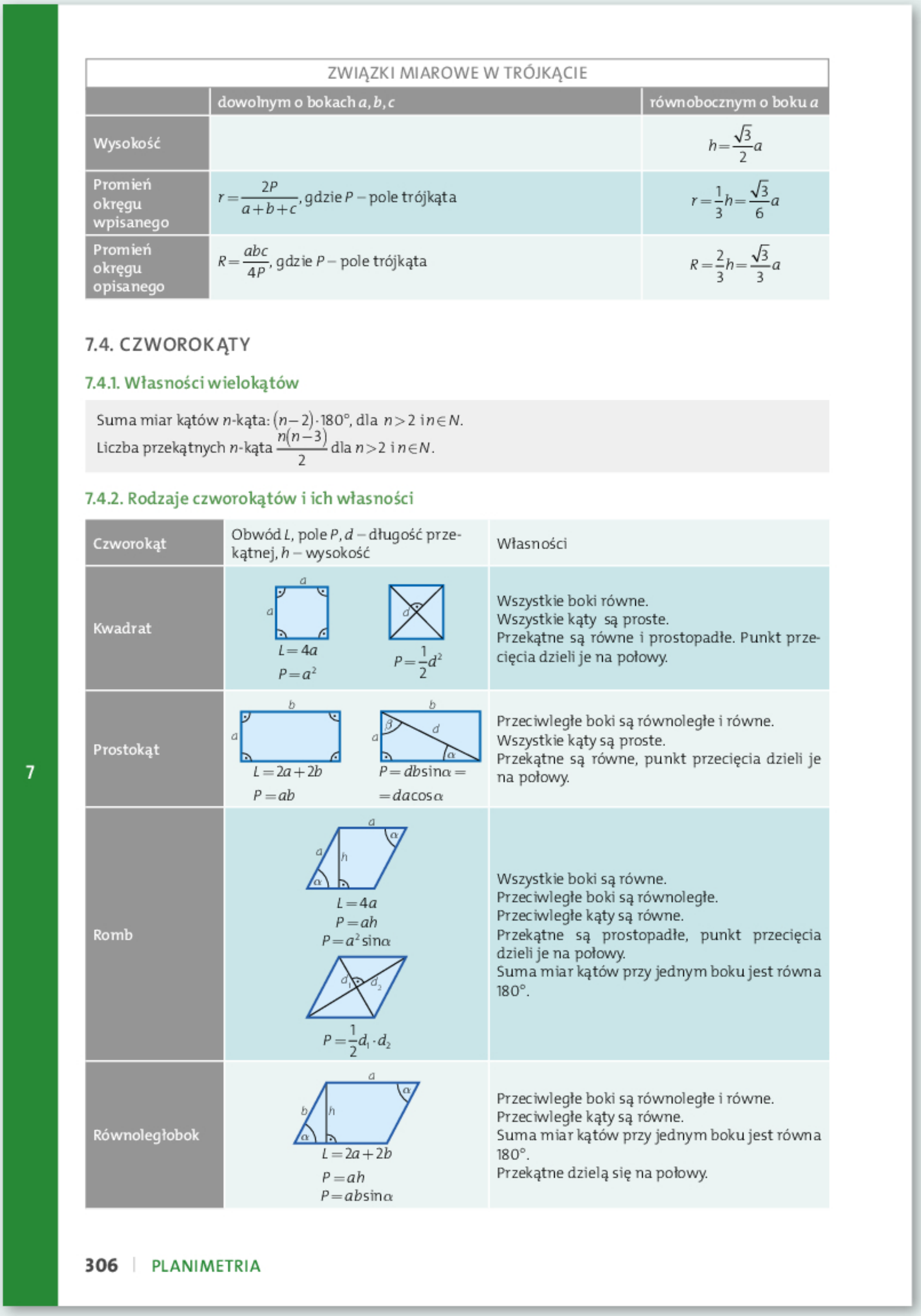
ZWIĄZKI MIAROWE W TRÓJKĄCIE

	dowolnym o bokach a, b, c	równobocznym o boku a
Obwód	$L=a+b+c$	$L=3a$
Pole	$P=\frac{1}{2}ah$ $P=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, gdzie α miara kąta zawarta między bokami a, b Wzór Herona: $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p=\frac{a+b+c}{2}$ $P=\frac{abc}{4R}$, gdzie R – promień okręgu opisanego na trójkącie $P=\frac{a+b+c}{2}\cdot r$, gdzie r – promień okręgu wpisanego w trójkąt	$P=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

TRÓJKĄTY | 305

	II etap rozwiązania Wyznaczenie ab, np. z równości: $\left(\sqrt{2}\right)^2=ab$, $2=ab$	2

wyjaśnienie i więcej informacji
w vademecum maturalnym Wydawnictwa Operon



ZWIĄZKI MIAROWE W TRÓJKĄCIE		
	dowolnym o bokach a, b, c	równobocznym o boku a
Wysokość		$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$
Promień okręgu wpisanego	$r=\frac{2P}{a+b+c}$, gdzie P – pole trójkąta	$r=\frac{1}{3}h=\frac{\sqrt{3}}{6}a$
Promień okręgu opisanego	$R=\frac{abc}{4P}$, gdzie P – pole trójkąta	$R=\frac{2}{3}h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

7.4. CZWOROKĄTY

7.4.1. Własności wielokątów

Suma miar kątów n-kąta: $(n-2)\cdot 180°$, dla $n>2$ i $n\in N$.
Liczba przekątnych n-kąta $\frac{n(n-3)}{2}$ dla $n>2$ i $n\in N$.

7.4.2. Rodzaje czworokątów i ich własności

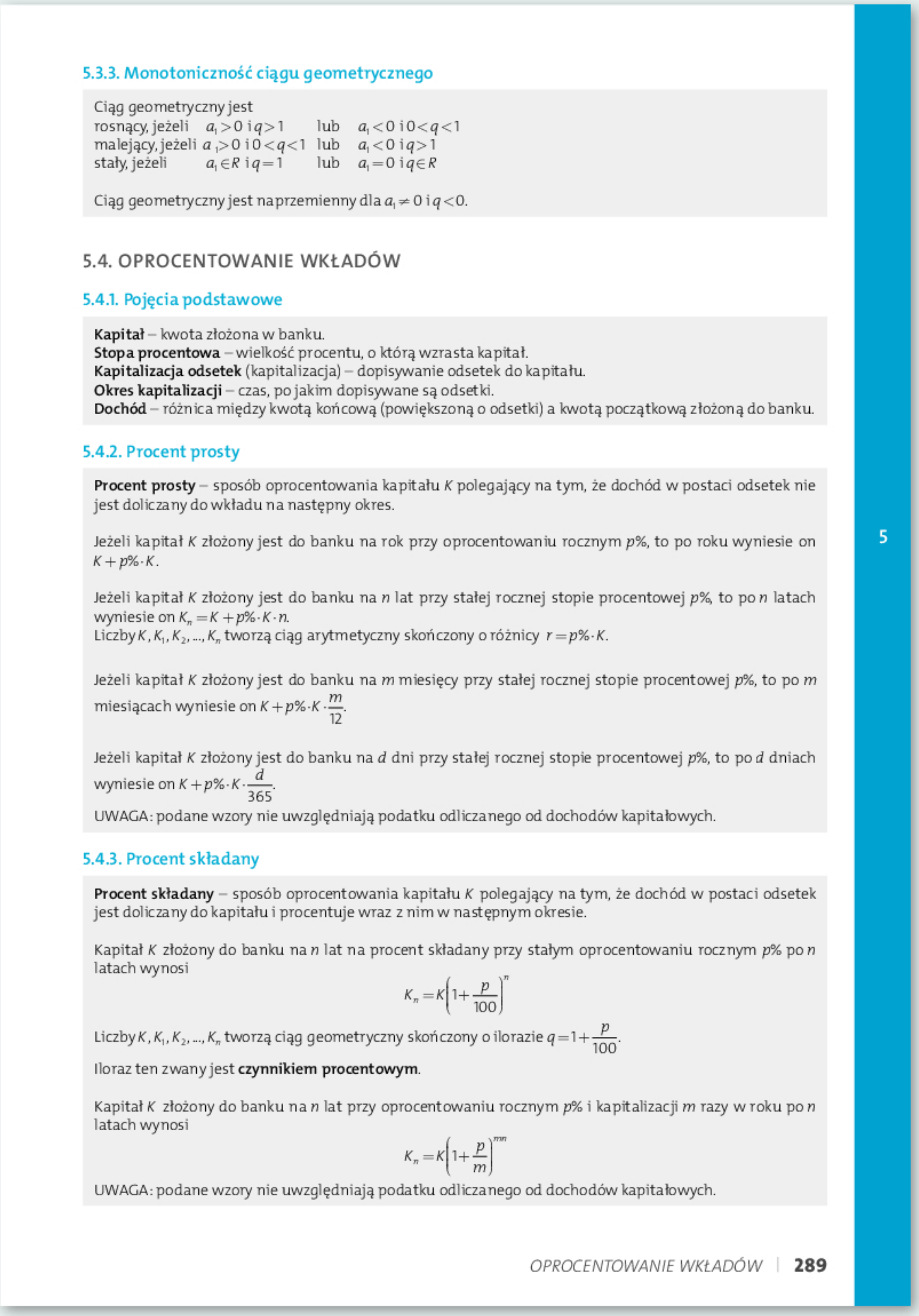
Czworokąt	Obwód L, pole P, d – długość przekątnej, h – wysokość	Własności
Kwadrat	$L=4a$ $P=a^2$ $P=\frac{1}{2}d^2$	Wszystkie boki równe. Wszystkie kąty są proste. Przekątne są równe i prostopadłe. Punkt przecięcia dzieli je na połowy.
Prostokąt	$L=2a+2b$ $P=ab$ $P=db\sin\alpha=$ $=da\cos\alpha$	Przeciwległe boki są równoległe i równe. Wszystkie kąty są proste. Przekątne są równe, punkt przecięcia dzieli je na połowy.
Romb	$L=4a$ $P=ah$ $P=a^2\sin\alpha$ $P=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$	Wszystkie boki są równe. Przeciwległe boki są równoległe. Przeciwległe kąty są równe. Przekątne są prostopadłe, punkt przecięcia dzieli je na połowy. Suma miar kątów przy jednym boku jest równa 180°.
Równoległobok	$L=2a+2b$ $P=ah$ $P=ab\sin\alpha$	Przeciwległe boki są równoległe i równe. Przeciwległe kąty są równe. Suma miar kątów przy jednym boku jest równa 180°. Przekątne dzielą się na połowy.

7

306 | PLANIMETRIA

na stronie 306

wyjaśnienie i więcej informacji
w vademecum maturalnym Wydawnictwa Operon



5.3.3. Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny jest
rosnący, jeżeli $a_1 > 0$ i $q > 1$ lub $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$
malejący, jeżeli $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ lub $a_1 < 0$ i $q > 1$
stały, jeżeli $a_1 \in R$ i $q = 1$ lub $a_1 = 0$ i $q \in R$

Ciąg geometryczny jest naprzemienny dla $a_1 \neq 0$ i $q < 0$.

5.4. OPROCENTOWANIE WKŁADÓW

5.4.1. Pojęcia podstawowe

Kapitał – kwota złożona w banku.
Stopa procentowa – wielkość procentu, o którą wzrasta kapitał.
Kapitalizacja odsetek (kapitalizacja) – dopisywanie odsetek do kapitału.
Okres kapitalizacji – czas, po jakim dopisywane są odsetki.
Dochód – różnica między kwotą końcową (powiększoną o odsetki) a kwotą początkową złożoną do banku.

5.4.2. Procent prosty

Procent prosty – sposób oprocentowania kapitału K polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu na następny okres.

Jeżeli kapitał K złożony jest do banku na rok przy oprocentowaniu rocznym $p\%$, to po roku wyniesie on $K + p\% \cdot K$.

Jeżeli kapitał K złożony jest do banku na n lat przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po n latach wyniesie on $K_n = K + p\% \cdot K \cdot n$.
Liczby $K, K_1, K_2, ..., K_n$ tworzą ciąg arytmetyczny skończony o różnicy $r = p\% \cdot K$.

Jeżeli kapitał K złożony jest do banku na m miesięcy przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po m miesiącach wyniesie on $K + p\% \cdot K \cdot \frac{m}{12}$.

Jeżeli kapitał K złożony jest do banku na d dni przy stałej rocznej stopie procentowej $p\%$, to po d dniach wyniesie on $K + p\% \cdot K \cdot \frac{d}{365}$.
UWAGA: podane wzory nie uwzględniają podatku odliczanego od dochodów kapitałowych.

5.4.3. Procent składany

Procent składany – sposób oprocentowania kapitału K polegający na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału i procentuje wraz z nim w następnym okresie.

Kapitał K złożony do banku na n lat na procent składany przy stałym oprocentowaniu rocznym $p\%$ po n latach wynosi

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Liczby $K, K_1, K_2, ..., K_n$ tworzą ciąg geometryczny skończony o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Iloraz ten zwany jest **czynnikiem procentowym**.

Kapitał K złożony do banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku po n latach wynosi

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{m}\right)^{mn}$$

UWAGA: podane wzory nie uwzględniają podatku odliczanego od dochodów kapitałowych.

OPROCENTOWANIE WKŁADÓW | 289

na stronie 289

ıa
ów


BEZPŁATNA DOSTAWA
SUPER RABAT
-15%
Operon
MATURA 2017
MATURA 2017
VADEMECUM
Język polski
ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY
OPERON