CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	**C**

Zadanie 2. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	**D**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$ (R4.1).	**B**

Zadanie 4. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).	**A**

Zadanie 5. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	**D**

Zadanie 6. (0−2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe (R10.2).	**753**

Zadanie 7. (0−2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy (R5.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Pierwszym wyrazem ciągu (a_n) jest $a_1 = \frac{1}{2x-371}$. Ilorazem tego ciągu jest $q = \frac{1}{2x-371}$.

Ponieważ wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie, więc szereg jest zbieżny, gdy $0 < \frac{1}{2x-371} < 1$. Zatem

$$2x-371 > 0 \text{ i } 2x-371 > 1.$$

Stąd

$$2x > 372,$$
$$x > 186.$$

Zatem szukaną liczbą całkowitą jest 187.

II sposób

Pierwszym wyrazem ciągu (a_n) jest $a_1 = \frac{1}{2x-371}$, ilorazem tego ciągu zaś jest $q = \frac{1}{2x-371}$. Szereg geometryczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy: $\left|\frac{1}{2x-371}\right| < 1$.

Rozwiązujemy powyższą nierówność:

$$-1 < \frac{1}{2x-371} < 1,$$

$$0 < \frac{2x-370}{2x-371} \wedge \frac{-2x+372}{2x-371} < 0,$$

$$x \neq 185{,}5 \wedge (x-185)(x-185{,}5) > 0 \wedge (x-186)(x-185{,}5) > 0,$$

$$x \in (-\infty, 185) \cup (186, +\infty).$$

Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, więc $x \in (186, +\infty)$. Zatem szukaną liczbą całkowitą jest 187.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje...1 p.
gdy zapisze $q = \frac{1}{2x-371}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje...2 p.
gdy zapisze najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg jest zbieżny, tzn. liczbę 187, o ile wynik nie został uzyskany w wyniku błędnego rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający bez stosownych obliczeń i bez komentarza zapisuje, że szukaną liczbą jest 187 i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 8. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ nierówność $x + y \le 2$ jest równoważna kolejno nierównościom

$$(x+y)^2 \le 4,$$
$$x^2 + 2xy + y^2 \le 4,$$
$$x^2 + 2xy + y^2 \le 2 \cdot 2,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \le 2\left(x^2 + y^2\right),$$
$$x^2 + y^2 + 2xy \le 2x^2 + 2y^2,$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \ge 0,$$
$$(x-y)^2 \ge 0.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y. To kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ nierówność $x + y \le 2$ jest równoważna nierówności $x^2 + 2xy + y^2 \le 2 \cdot 2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ nierówność $x + y \le 2$ jest równoważna nierówności $x^2 + y^2 + 2xy \le 2\left(x^2 + y^2\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

II sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2+y^2=2$.
Obie strony nierówności $x+y\le 2$ są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymujmy nierówność równoważną

$$x^2+y^2+2xy\le 4.$$

Stąd otrzymujemy $2+2xy\le 4$, więc $xy\le 1$.
Obie strony tej nierówności $xy\le 1$ są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu otrzymujmy nierówność równoważną

$$x^2y^2\le 1.$$

Z założenia $y^2=2-x^2$. Wówczas nierówność $x^2y^2\le 1$ jest równoważna nierównościom

$$x^2\left(2-x^2\right)\le 1,$$

$$-x^4+2x^2\le 1,$$

$$x^4-2x^2+1\ge 0,$$

$$\left(x^2-1\right)^2\ge 0.$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. To kończy dowód.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2+y^2=2$ nierówność $x+y\le 2$ jest równoważna nierówności $xy\le 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą, np. $x\left(\sqrt{2-x^2}\right)\le 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

III sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2+y^2=2$.
Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową, otrzymujemy

$$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Stąd i z równości $x^2+y^2=2$ wynika, że $\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{2}{2}}=1$, czyli $x+y\le 2$. To kończy dowód.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy zapisze nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową i na tej podstawie uzasadni prawdziwość nierówności $x+y \le 2$.

Przykładowe rozwiązanie

IV sposób

Dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2+y^2=2$ nierówność $x+y \le 2$ jest równoważna kolejno nierównościom

$$(x+y)^2 \le 4\,,$$
$$x^2+2xy+y^2 \le 4\,,$$
$$2+2xy \le 4\,,$$
$$xy \le 1\,,$$
$$x^2y^2 \le 1\,.$$

Możemy przyjąć, że $x^2=1-p$ oraz $y^2=1+p$, gdzie $-1<p<1$. Zatem nierówność $x^2y^2 \le 1$ przyjmuje postać $(1-p)(1+p) \le 1$, czyli $1-p^2 \le 1$, co jest prawdą dla każdej liczby rzeczywistej p, więc, w szczególności, dla każdej liczby $-1<p<1$. To kończy dowód.

Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2+y^2=2$ nierówność $x+y \le 2$ jest równoważna nierówności $xy \le 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2+y^2=2$ nierówność $x+y \le 2$ jest równoważna nierówności $x^2y^2 \le 1$ oraz przyjmie, że $x^2=1-p$ oraz $y^2=1+p$, gdzie $-1<p<1$, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

V sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2 + y^2 = 2$.
Stąd

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2 + 2xy,$$
$$(x+y)^2 = 2 + 2xy,$$
$$x + y = \sqrt{2 + 2xy}.$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $(x-y)^2 \geq 0$, a stąd kolejno

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$
$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Zatem dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistymi x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ prawdziwa jest nierówność

$$2xy \leq 2,$$
$$xy \leq 1.$$

Stąd wynika, że

$$x + y = \sqrt{2 + 2xy} \leq \sqrt{2 + 2 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ nierówność $x + y \leq 2$ równoważna nierówności $xy \leq 1$

albo

- zapisze, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ suma liczb x i y jest równa $x + y = \sqrt{2 + 2xy}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy uzasadni, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$ nierówność $x + y \leq 2$ równoważna nierówności $xy \leq 1$ oraz zapisze sumę liczb x i y w postaci $x + y = \sqrt{2 + 2xy}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

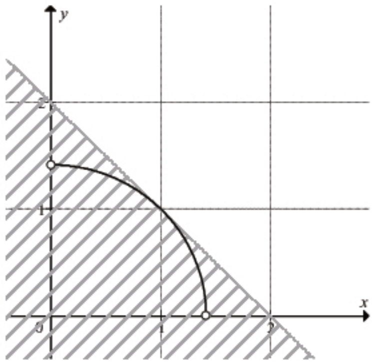
Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

VI sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2+y^2=2$. To oznacza, że każda para liczb (x,y) spełniająca to równanie stanowi współrzędne punktu leżącego w I ćwiartce układu współrzędnych na okręgu o środku $S=(0,0)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$. Punkt $A=(1,1)$ leży na tym okręgu, więc prosta o równaniu $y=x$ zawiera średnicę tego okręgu. Oznacza to, że prosta prostopadła do niej i przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu. Ma ona równanie $y=-(x-1)+1$, czyli $x+y=2$. Ta prosta wyznacza dwie półpłaszczyzny, z których jedna opisana jest nierównością $x+y\le 2$. Środek S okręgu leży w tej półpłaszczyźnie, gdyż $0+0=0<2$. Stąd wynika, że w tej półpłaszczyźnie leżą też wszystkie punkty okręgu.



To kończy dowód.

Schemat punktowania VI sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że wszystkie punkty $P=(x,y)$, których współrzędne spełniają równanie $x^2+y^2=2$, leżą na okręgu o środku $S=(0,0)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze, że wszystkie punkty $P=(x,y)$, których współrzędne spełniają równanie $x^2+y^2=2$, leżą na okręgu o środku $S=(0,0)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$ oraz że każdy punkt okręgu leży w półpłaszczyźnie opisanej nierównością $x+y\le 2$, ale nie stwierdzi, że krawędź tej półpłaszczyzny jest styczna do okręgu i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zapisze, że wszystkie punkty $P=(x,y)$, których współrzędne spełniają równanie $x^2+y^2=2$, leżą na okręgu o środku $S=(0,0)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$ oraz że każdy punkt okręgu leży w półpłaszczyźnie opisanej nierównością $x+y\le 2$, a także stwierdzi, że prosta o równaniu $x+y=2$ jest styczna do tego okręgu.

Przykładowe rozwiązanie

VII sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2+y^2=2$. Stąd otrzymujemy $y^2=2-x^2$, więc $y=\sqrt{2-x^2}$ dla $0<x<\sqrt{2}$, gdyż $y>0$. Wówczas nierówność $x+y\le 2$ jest równoważna nierówności

$$x+\sqrt{2-x^2}\le 2,$$
$$\sqrt{2-x^2}\le 2-x.$$

Obie strony tej nierówności są dodatnie, gdyż $0<x<\sqrt{2}$, więc, podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujmy nierówność równoważną

$$2-x^2\le 4-4x+x^2,$$
$$2x^2-4x+2\ge 0,$$
$$x^2-2x+1\ge 0,$$
$$(x-1)^2\ge 0,$$

która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. To kończy dowód.

Schemat punktowania VII sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy wyznaczy z równości $x^2+y^2=2$ jedną z liczb w zależności od drugiej: $y=\sqrt{2-x^2}$ dla $0<x<\sqrt{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.

gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą, np. $x^2+\sqrt{2-x^2}\le 2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe rozwiązanie

VIII sposób

Niech x i y będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x^2+y^2=2$. Stąd otrzymujemy $y=\sqrt{2-x^2}$ dla $0<x<\sqrt{2}$, gdyż $y>0$. Do obu stron równania $x^2+y^2=2$ dodajemy $2xy$, otrzymując

$$x^2+y^2+2xy=2+2xy,$$
$$(x+y)^2=2+2xy.$$

Stąd

$$x+y=\sqrt{2+2xy}=\sqrt{2+2x\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2x^2-x^4}}.$$

Rozważmy funkcję f określoną dla $0<x<\sqrt{2}$ wzorem $f(x)=2+2\sqrt{2x^2-x^4}$. Wyznaczymy największą wartość tej funkcji. Ponieważ funkcja $y=2+2\sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcja f osiąga największą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy największą wartość osiąga funkcja g określona dla $0 < x < \sqrt{2}$ wzorem $g(x) = 2x^2 - x^4$. Obliczamy pochodną tej funkcji

$$g'(x) = 4x - 4x^3 \text{ dla } 0 < x < \sqrt{2}.$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej i badamy jej znak.

Ponieważ $g'(x) = 4x(1-x)(1+x)$ oraz $4x(1+x) > 0$ dla każdego $0 < x < \sqrt{2}$, więc:

$g'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - x = 0$, czyli $x = 1$,

$g'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - x > 0$ i $0 < x < \sqrt{2}$, czyli gdy $0 < x < 1$,

$g'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 - x < 0$ i $0 < x < \sqrt{2}$, czyli gdy $1 < x < \sqrt{2}$.

Zatem w przedziale $\left(0,1\right\rangle$ funkcja g jest rosnąca, w przedziale $\left\langle 1,\sqrt{2}\right)$ jest malejąca, a w punkcie $x = 1$ przyjmuje maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Gdy $x = 1$, to

$$f(1) = 2 + 2\sqrt{2 \cdot 1^2 - 1^4} = 4.$$

Zatem

$$x + y \le \sqrt{4} = 2,$$

co kończy dowód.

Schemat punktowania VIII sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wyznaczy sumę liczb x i y w zależności od jednej zmiennej, np. $x + y = \sqrt{2 + 2x\sqrt{2 - x^2}}$ dla $0 < x < \sqrt{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy miejsca zerowe pochodnej i zbada jej znak, np.:

$g'(x) = 0$ dla $x = 1$, $g'(x) > 0$ dla $0 < x < 1$, $g'(x) < 0$ dla $1 < x < \sqrt{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający jako jedyne uzasadnienie prawdziwości nierówności przywołuje „nierówność Cauchy'ego" i nie zapisuje tej nierówności ani żadnych wniosków płynących z zastosowania tej nierówności, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający, oprócz powołania się na nazwisko Cauchy, zapisze odpowiednią nierówność Cauchy'ego, to przedstawione rozwiązanie jest oceniane tak, jak to przewiduje schemat.
3. Jeżeli zdający nie zapisze koniecznego założenia o możliwych wartościach x przy wyznaczaniu y w zależności od x, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.

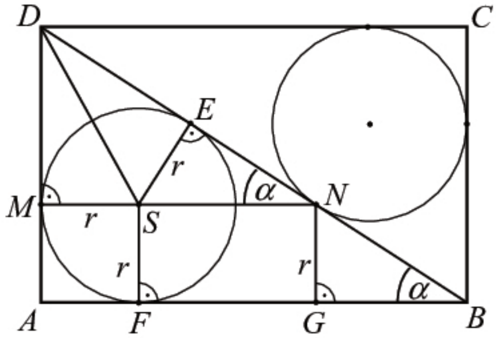
Zadanie 9. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Poprowadźmy promienie *SE* i *SF* okręgu o środku *S* do punktów *E* i *F* styczności tego okręgu odpowiednio z przekątną *BD* i bokiem *AB* prostokąta. Niech *G* będzie rzutem punktu *N* na bok *AB*, jak na rysunku.



Wówczas $|SM|=|SE|=|SF|=|MA|=|NG|$ oraz $|DE|=|BN|$.

Trójkąty *DMS* i *DES* są prostokątne, więc z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów otrzymujemy

$$|DM|=\sqrt{|DS|^2-|SM|^2}=\sqrt{|DS|^2-|SE|^2}=|DE|.$$

Odcinek *MN* jest równoległy do *AB*, więc kąty *GBN* i *ENS* są równe. Trójkąty *BGN* i *NES* są prostokątne, więc kąty *BNG* i *NSE* także są równe. To z kolei wraz z równością $|SE|=|NG|$ oznacza, że trójkąty *BGN* i *NES* są przystające. Zatem $|BN|=|NS|$.

Stąd

$$|MN|=|MS|+|SN|=|MA|+|BN|=|MA|+|DE|=|MA|+|DM|=|AD|.$$

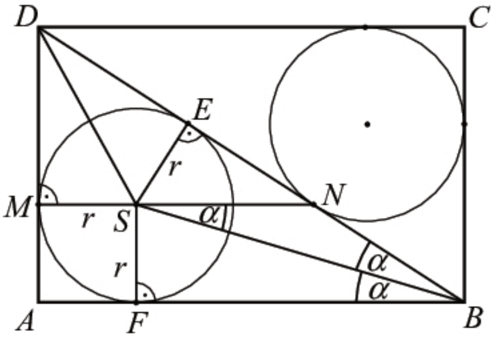
To kończy dowód.

Uwaga:

Równość odcinków *DM* i *DE* wynika też bezpośrednio z twierdzenia o odcinkach stycznych.

II sposób

Poprowadźmy promienie SE i SF okręgu o środku S do punktów E i F styczności tego okręgu odpowiednio z przekątną BD i bokiem AB prostokąta. Połączmy punkty S oraz B, jak na rysunku.



Wówczas $|SM| = |SE| = |SF| = |MA|$ oraz $|DE| = |BN|$.

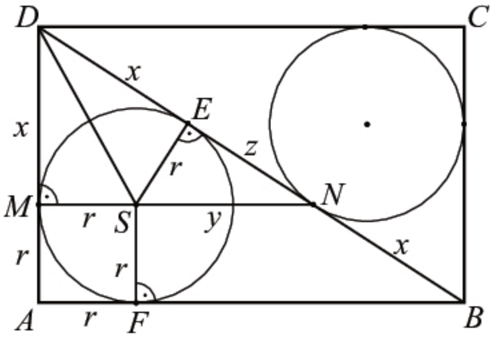
Ponieważ $|MN| = r + |SN|$ oraz $|AD| = r + |DM|$, wystarczy wykazać, że $|DM| = |SN|$.

Z przystawania trójkątów prostokątnych BFS i BES (wspólna przeciwprostokątna i równe przyprostokątne $|SF| = |SE|$) otrzymujemy $|\sphericalangle EBS| = |\sphericalangle FBS| = \alpha$.

Odcinek MN jest równoległy do AB, zatem kąty FBS i NSB są równe, jako kąty naprzemianległe, czyli kąty NSB i SBN także są równe. Wobec powyższego trójkąt BSN jest równoramienny i $|BN| = |NS|$ oraz $|BN| = |DM|$, a stąd wynika równość $|DM| = |SN|$. To kończy dowód.

III sposób

Poprowadźmy promienie okręgu o środku S do punktów E i F styczności tego okręgu z bokami BD i AB trójkąta DAB. Niech r oznacza promień tego okręgu, $x = |MD|$, $y = |SN|$ i $z = |EN|$.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|ED| = |MD| = x$. Trójkąty DAB i CBD są przystające, więc $|NB| = |ED| = x$. Czworokąt $AFSM$ jest kwadratem, więc $|MA| = |AF| = r$. Ponadto $|BF| = |BE| = x + z$.

Trójkąty DAB i DMN są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku D). Zatem

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|MD|}{|DN|}, \text{ czyli } \frac{r+x}{2x+z} = \frac{x}{x+z}.$$

Stąd

$$(r+x)(x+z)=(2x+z)x,$$
$$rx+rz+x^2+xz=2x^2+xz,$$
(1)
$$z=\frac{x^2-rx}{r}.$$

Z podobieństwa trójkątów MDN i ESN (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku N) wynika , że

$$\frac{|SE|}{|SN|}=\frac{|MD|}{|DN|},\ \text{czyli}\ \frac{r}{y}=\frac{x}{x+z}.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$y=\frac{r(x+z)}{x}=\frac{rx+r\cdot\frac{x^2-rx}{r}}{x}=\frac{rx+x^2-rx}{x}=x.$$

To oznacza, że $|AD|=r+x=r+y=|MN|$. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 p.

Zdający
- poprowadzi odcinki SE i NG

albo
- zapisze równość $|DM|=|DE|$,

albo
- zapisze równość $|DE|=|BN|$,

albo
- zapisze równość $|SM|=|SE|=|MA|=|NG|$,

albo
- zapisze, że trójkąty BFS i BES są przystające,

albo
- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów DAB i DMN: $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|MD|}{|DN|}$,

albo
- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów MDN i ESN: $\frac{|SE|}{|SN|}=\frac{|MD|}{|DN|}$,

albo
- zauważy, że odcinek BS jest dwusieczną kąta ABD,

albo
- zapisze, że trójkąt BNS jest równoramienny

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 p.

Zdający
- zapisze, że trójkąty BGN i NES są przystające

albo

- zapisze, że trójkąt BSN jest równoramienny i $|BN| = |DM|$,

albo

- zapisze proporcje: $\frac{r+x}{2x+z} = \frac{x}{x+z}$ i $\frac{r}{y} = \frac{x}{x+z}$,

albo

- zauważy, że $|MN| = r + |SN|$ i $|EN| = |AB| - |AD|$,

albo

- zapisze proporcje: $\frac{r+x}{r+y+\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{x}{r+y}$ i $\frac{r}{z} = \frac{x}{r+y}$ oraz zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa w jednym z trójkątów BGN i ENS

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający wykaże, że $|MN| = |AD|$.

Zadanie 10. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wyznaczymy najpierw współrzędne punktu przecięcia. Przyrównujemy $f(x)$ i $g(x)$, a otrzymane równanie zapisujemy w postaci

$$(a+1)x = 7.$$

Ponieważ $x > 0$, więc $a+1 > 0$, czyli $a > -1$.
Zatem

$$y = f(x) = \frac{7}{a+1} - 2 = \frac{5-2a}{a+1}.$$

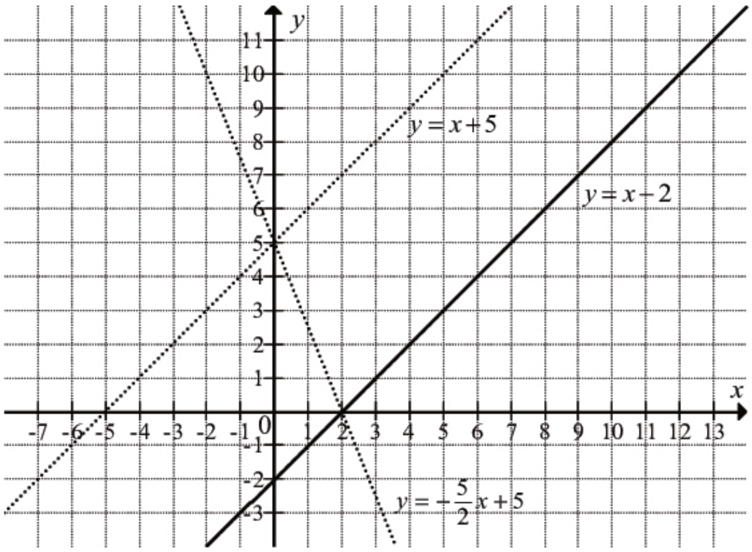
Ponieważ $y > 0$, a ponadto $a+1 > 0$, więc wynika stąd, że $5-2a > 0$, skąd otrzymujemy

$$a < \frac{5}{2}.$$

Łączymy oba warunki $x > 0$ i $y > 0$ i zapisujemy odpowiedź: punkt przecięcia wykresów funkcji ma obie współrzędne dodatnie dla $-1 < a < \frac{5}{2}$.

II sposób

Zilustrujmy w układzie współrzędnych sytuację opisaną w treści zadania.



Ponieważ równanie $y = -ax + 5$ opisuje pęk prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych $(0,5)$, więc rysując proste o równaniach $y = x + 5$ oraz $y = -\frac{5}{2}x + 5$ (linie przerywane) otrzymujemy graniczne położenia linii prostych należących do tego pęku – prosta o równaniu $y = x + 5$ nie ma żadnego punktu wspólnego z prostą o równaniu $y = x - 2$, natomiast prosta o równaniu $y = -\frac{5}{2}x + 5$ ma jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = x - 2$, jest nim punkt $(2,0)$, którego współrzędne nie spełniają warunku określonego w treści tego zadania.

Zapisujemy odpowiedź: Punkty przecięcia wykresów funkcji mają dwie dodatnie współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 < a < \frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający wyznaczy jedną ze współrzędnych punktu przecięcia w zależności od a oraz zapisze:

- $x = \frac{7}{a+1}$

albo

- $y = \frac{7}{a+1} - 2$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- wyznaczy obie współrzędne punktu przecięcia w zależności od a i zapisze: $x = \frac{7}{a+1}$ i $y = \frac{5-2a}{a+1}$ dla $a \neq -1$

albo

- wyznaczy pierwszą współrzędną punktu przecięcia w zależności od a: $x = \frac{7}{a+1}$ i zapisze, że druga współrzędna jest dodatnia, gdy $x > 2$ (o ile wynika to z przywołanej koniunkcji $x > 0 \wedge x > 2$),

albo

- zapisze, że $x > 0$, gdy $a > -1$ i nie wyznaczy drugiej współrzędnej punktu przecięcia,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną jednej pary prostych o równaniach: $y = x - 2$ i $y = x + 5$ lub $y = x - 2$ i $y = -\frac{5}{2}x + 5$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający:

- zapisze, że dla $a > -1$ spełniona jest nierówność $x > 0$ i wyznaczy drugą współrzędną

albo

- zapisze, że dla $-1 < a < \frac{5}{2}$ spełniona jest nierówność $y > 0$ i nie rozważy warunku $x > 0$,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną, na której znajdą się proste o równaniach:
$$y = x + 5 \quad \text{i} \quad y = -\frac{5}{2}x + 5 \quad \text{i} \quad y = x - 2$$
oraz zapisze przynajmniej jedną poprawną nierówność, którą spełnia współczynnik a,

albo

- sporządzi ilustrację graficzną prostej o równaniu: $y = x - 2$ i pęku prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych $(0, 5)$ oraz zapisze przynajmniej jedną poprawną nierówność, którą spełnia współczynnik a

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze, że dla $-1 < a < \frac{5}{2}$ obie współrzędne punktu przecięcia są dodatnie.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający podstawia do równania pęku prostych współrzędne punktu $(0,2)$, otrzymuje $a=\frac{5}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli dodatkowo poda, że $a<\frac{5}{2}$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający przedstawia rysunek, na którym jest tylko prosta o równaniu $y=x-2$, i odpowiedź $a\in\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ bez żadnych wyjaśnień, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ $\cos^2 x\geq 0$ dla każdego *x*, to nierówność $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\cos^2 x}<0$ jest równoważna koniunkcji $2\cos x-\sqrt{3}<0$ i $\cos x\neq 0$, czyli $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x\neq 0$.

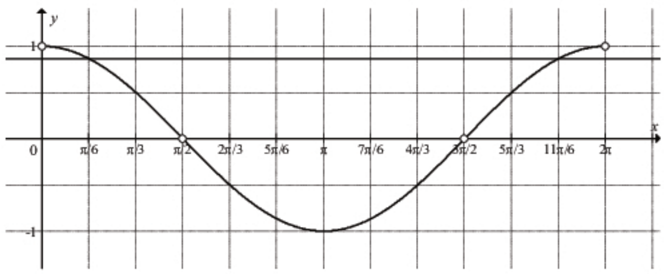
Zatem $x\in\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, gdzie k jest liczbą całkowitą, i $x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$, gdzie m jest liczbą całkowitą.

W przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$ rozwiązaniem tej nierówności jest każda liczba

$$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right).$$

Uwaga:

Nierówności $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x\neq 0$ możemy rozwiązać, np. odczytując odpowiednie argumenty funkcji $f(x)=\cos x$, dla których przyjmuje ona wartości mniejsze od $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i różne od zera.



Funkcja cosinus przyjmuje w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla dwóch argumentów: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$. Ma również w tym przedziale dwa miejsca zerowe: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest suma przedziałów

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze, że nierówność $\cos^2 x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) < 0$ jest równoważna koniunkcji $\cos^2 x \neq 0$ i $2\cos x - \sqrt{3} < 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze, że $\cos^2 x \neq 0$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą

albo

- zapisze, że $\cos^2 x \neq 0$ dla $x \neq \frac{\pi}{2}$ i $x \neq \frac{3\pi}{2}$ lub $\cos x \neq 0$ dla $x \neq \frac{\pi}{2}$ i $x \neq \frac{3\pi}{2}$,

albo

- rozwiąże nierówność $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

albo

- rozwiąże nierówność $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 p.

Zdający zapisze, że $\cos^2 x \neq 0$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą oraz rozwiąże nierówność $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie k jest liczbą całkowitą i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający rozwiąże nierówność $\cos^2 x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) < 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right) \text{ lub } x \in \left(30^\circ, 90^\circ\right) \cup \left(90^\circ, 270^\circ\right) \cup \left(270^\circ, 330^\circ\right).$$

Uwagi:

1. Zdający nie musi podawać rozwiązań ogólnych. Na każdym etapie rozwiązania może ograniczyć rozumowanie do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

2. Jeżeli zdający zapisze, że $\cos^2 x \neq 0$ i podaje zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ lub $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

3. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania $\cos x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ lub wszystkie rozwiązania równania $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

4. Jeżeli zdający zapisze warunek $\cos x \neq 0$ i poda tylko $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x \neq \frac{\pi}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

5. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\cos^2 x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) < 0$, wykona podstawienie $t = \cos x$, a następnie rozwiązując nierówność $t^2\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$ przyjmuje, że 0 jest pierwiastkiem jednokrotnym wielomianu i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, otrzymując $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 12. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a, rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem, rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą oraz równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.1, R3.2, 3.5, R3.9).

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie zadania dzielimy na cztery etapy. W pierwszym etapie wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki. W drugim, wyznaczymy te wartości parametru m, dla których pierwiastki trójmianu spełniają warunek $|x_1 - x_2| < 3$. W trzecim wyznaczamy te wartości parametru m, dla których pierwiastki x_1, x_2 są tego samego znaku. W czwartym – końcowym etapie, wyznaczymy wszystkie szukane wartości parametru m.

I etap

Ponieważ trójmian f ma dwa różne pierwiastki, więc wyróżnik Δ tego trójmianu jest dodatni, zatem

$$\Delta = \left(2(m+1)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0 .$$

Nierówność $\left(2(m+1)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m+1) > 0$ przekształcamy w sposób równoważny

$$4\left(m^2 + 2m + 1\right) - 4 \cdot (6m+1) > 0 ,$$

$$m^2 + 2m + 1 - 6m - 1 > 0 ,$$

$$m^2 - 4m > 0 ,$$

$$m(m-4) > 0 .$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest każda liczba $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

II etap

I sposób

Nierówność $|x_1 - x_2| < 3$ można zapisać, stosując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego, w postaci

$$\left| \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right| < 3 ,$$

$$\left| \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \right| < 3 ,$$

$$\left| \frac{-\sqrt{\Delta}}{1} \right| < 3 ,$$

$$\sqrt{\Delta} < 3 .$$

Ponieważ $\Delta > 0$, więc $\sqrt{\Delta} > 0$. Zatem obie strony nierówności są dodatnie. Stąd $0 < \Delta < 9$. Zatem

$$4\left(m^2 + 2m + 1\right) - 4(6m+1) - 9 < 0 ,$$

$$4m^2 - 16m - 9 < 0 ,$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

II sposób
Obie strony nierówności $|x_1 - x_2| < 3$ są dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną

$$(x_1 - x_2)^2 < 9.$$

Tę nierówność możemy z kolei zapisać w postaci

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy nierówność z niewiadomą m:

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4(6m + 1) - 9 < 0,$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

III etap
Ponieważ pierwiastki x_1, x_2 są tego samego znaku, więc $x_1 \cdot x_2 > 0$. Ze wzoru Viète'a, otrzymujemy nierówność

$$\frac{6m+1}{1} > 0 \text{, skąd } m > -\frac{1}{6}.$$

IV etap
Wyznaczamy część wspólną zbiorów:

$$\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right),$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right),$$

$$(-\infty, 0) \cup (4, +\infty).$$

Ostatecznie $m \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

- **Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$:

$$m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

- **Drugi** etap polega na rozwiązaniu nierówności $|x_1 - x_2| < 3$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
1 punkt zdający otrzymuje, gdy:

- zapisze nierówność $|x_1 - x_2| < 3$ w postaci $\left|-\sqrt{\Delta}\right| < 3$ lub $\left|\sqrt{\Delta}\right| < 3$, lub $(x_1 - x_2)^2 < 9$

albo

- zapisze nierówność $|x_1 - x_2| < 3$ w postaci: $\left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| < 3$ $\Delta < 9$ lub $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 9$.

2 punkty zdający otrzymuje, gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą m, np.

$$\left(-\frac{2(m+1)}{1}\right)^2-4\cdot\frac{6m+1}{1}<9$$

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie tej nierówności: $m\in\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$.

- **Trzeci** etap polega na ustaleniu, dla jakich m pierwiastki trójmianu są tego samego znaku.

1 punkt zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności $\frac{6m+1}{1}>0$: $m\in\left(-\frac{1}{6},+\infty\right)$.

- **Czwarty etap** polega na ustaleniu, dla których wartości parametru m pierwiastki trójmianu spełniają wszystkie warunki zadania. Wyznaczamy część wspólną zbiorów: $\left(-\frac{1}{6},+\infty\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$ i $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

Za ten etap zdający może otrzymać **1 punkt**, gdy:

- poprawnie wykonał przynajmniej dwa etapy spośród I, II i III, a ponadto w każdym z etapów otrzymał niepusty i różny od zbioru liczb rzeczywistych (R) zbiór rozwiązań

albo

- poprawnie wykonał etapy I lub III i otrzymał co najmniej 2 punkty za II etap, a ponadto w każdym z etapów otrzymał niepusty i różny od zbioru liczb rzeczywistych (R) zbiór rozwiązań.

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny w trakcie rozwiązywania warunku $\left|-\sqrt{\Delta}\right|<3$ lub $\left|\sqrt{\Delta}\right|<3$, np. podniesie obie strony nierówności do kwadratu i otrzyma $\Delta>9$, to za II etap otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 13. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz wyznacza współrzędne środka odcinka (8.3, 8.4, 8.5).

Przykładowe rozwiązanie

Zauważamy, że jeżeli AC jest przekątną czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg i prosta AC jest osią symetrii tego czworokąta, to ten czworokąt jest deltoidem, a trójkąty ABC i ADC są prostokątne. Obliczymy najpierw współrzędne wierzchołka D, który jest obrazem wierzchołka B, w symetrii osiowej względem prostej AC. Ponieważ prosta BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt B, więc jej równanie ma postać

$$y=-x+8 .$$

Obliczamy współrzędne środka S przekątnej BD. Ponieważ jest to punkt przecięcia prostych AC i BD, więc wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-x+8 \end{cases}$$

Otrzymujemy stąd $x=3$ i $y=5$. Zatem punkt S ma współrzędne $S=(3,5)$. Współrzędne punktu D spełniają zatem równania

$$\frac{x_D+0}{2}=3 \quad \text{i} \quad \frac{y_D+8}{2}=5 .$$

Stąd wynika, że $x_D=6$ i $y_D=2$, czyli $D=(6,2)$.

Obliczymy teraz współrzędne wierzchołka C. Zauważamy, że jest to punkt przecięcia prostej AC i prostej CD, która jest prostopadła do prostej AD i przechodzi przez punkt D.

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy $\frac{2-32}{6-30}=\frac{5}{4}$, więc prosta CD ma równanie postaci

$$y=-\frac{4}{5}(x-6)+2 .$$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{4}{5}(x-6)+2 \end{cases}$ i otrzymujemy $\begin{cases} x=\frac{24}{9}=\frac{8}{3} \\ y=\frac{42}{9}=\frac{14}{3} \end{cases}$.

Zatem $C=\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części. Pierwsza, to obliczenie współrzędnych punktu D, druga, to obliczenie współrzędnych punktu C. Mogą być one wykonane niezależnie od siebie, w dowolnej kolejności. Za pierwszą część rozwiązania zdający otrzymuje **2 punkty**, a za drugą **3 punkty.**

Schemat punktowania pierwszej części

1 punkt przyznajemy zdającemu, który wyznaczy równanie prostej BD: $y=-x+8$ i zapisze, że punkt przecięcia prostych AC i BD jest środkiem odcinka BD lub wykorzysta ten fakt.

2 punkty przyznajemy zdającemu za obliczenie współrzędnych punktu D: $D=(6,2)$.

Schemat punktowania drugiej części

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zapisze, że trójkąt ADC jest trójkątem prostokątnym lub wykorzysta ten fakt.

2 punkty przyznajemy zdającemu za wyznaczenie równania prostej CD: $y=-\frac{4}{5}(x-6)+2$.

3 punkty przyznajemy zdającemu za obliczenie współrzędnych punktu C: $C=\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right)$.

Uwaga:
Współrzędne punktu C zdający może obliczać inaczej. Poniżej schematy przydziału 3 punktów za obliczenie współrzędnych wierzchołka C.

- W przypadku obliczenia w pierwszej kolejności współrzędnych środka okręgu opisanego na danym czworokącie, który jest środkiem odcinka AC.

1 punkt – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą opisujące zależność $|SA|^2=|SB|^2$,
2 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu S,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu C.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu C, z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABC.

1 punkt – gdy zdający zauważy, że trójkąt ABC jest prostokątny, np. zapisze $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$,
2 punkty – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABC,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu C.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu C, z wykorzystaniem symetralnej odcinka AB i środka okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

1 punkt – gdy zdający zapisze równanie symetralnej odcinka AB,
2 punkty – gdy zdający wyznaczy współrzędne środka okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C, D,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu C.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu C, z wykorzystaniem kąta pomiędzy prostymi AD i AB.

1 punkt – gdy zdający obliczy tangens kąta DAB,
2 punkty – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą z wykorzystaniem współczynników kierunkowych prostych BC i CD jako tangensów odpowiednich kątów,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu C.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu *C*, z wykorzystaniem iloczynu skalarnego wektorów *BC* i *BA* (albo, po wyznaczeniu współrzędnych punktu *D*, wektorów *DA* i *DC*).

1 punkt – gdy zdający zapisze, że wektory *BC* i *BA* albo *DA* i *DC* są prostopadłe lub wyznaczy ich współrzędne,
2 punkty – gdy zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą wynikające z zerowania się iloczynu skalarnego wektorów,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu *C*.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu *C*, z wykorzystaniem równania okręgu przechodzącego przez punkty *A*, *B*, *D*.

1 punkt – gdy zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, z którego można obliczyć współczynniki w równaniu okręgu,
2 punkty – gdy zdający wyznaczy równanie okręgu opisanego na trójkącie *ABD*,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu *C*.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu *C*, z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów.

1 punkt – gdy zdający wyznaczy cosinus kąta *BAD*,
2 punkty – gdy zdający zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie *BCD* i zapisze równanie z jedną niewiadomą,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu *C*.

- W przypadku obliczenia współrzędnych punktu *C*, z wykorzystaniem twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym *ABC* (albo, po wyznaczeniu współrzędnych punktu *D*, w trójkącie *ACD*).

1 punkt – gdy zdający wyznaczy długości odcinków *AS* i *BS*, lub *AS* i *DS*, gdzie *S* jest spodkiem wysokości trójkąta należącym do boku *AC*,
2 punkty – gdy zdający zastosuje twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym i zapisze równanie z jedną niewiadomą,
3 punkty – gdy zdający obliczy współrzędne punktu *C*.

Zadanie 14. (0−3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Miejsce dla cyfry 1 wybieramy na $\binom{10}{3}$ sposobów. Na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfry 2 lub 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$\binom{10}{3}\cdot 2^7 = 120\cdot 128 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy.

II sposób

Rozpatrzymy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.
1. Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1, to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na $\binom{9}{2}$ sposobów, na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{2}\cdot 2^7 = 36\cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.
2. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{3}\cdot 2^6 = 84\cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2.
3. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów.
Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{3}\cdot 2^6 = 84\cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.
Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608+2\cdot 5376=15360$$

liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

III sposób

Rozpatrzymy osiem rozłącznych przypadków, wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy:

1. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$,
2. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 1 dwójka i 6 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 6!}=840$,
3. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 2 dwójki i 5 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}=2520$,
4. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 3 dwójki i 4 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}=4200$,
5. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 4 dwójki i 3 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 3!}=4200$,
6. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 5 dwójek i 2 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!}=2520$,
7. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 6 dwójek i 1 trójka, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 6!}=840$,
8. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 dwójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$.

Sumujemy liczby otrzymane w każdym przypadku i otrzymujemy:

$$2\cdot\left(120+840+2520+4200\right)=2\cdot 7680=15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający zapisze, że:

- miejsce dla cyfry 1 można wybrać na $\binom{10}{3}$ sposobów

albo

- miejsca dla cyfr 2 lub 3 można wybrać na $\binom{10}{7}$ sposobów,

albo

- cyfry 2 lub 3 można rozmieścić na 2^7 sposobów,

albo

- jeżeli cyfra 1 jest na ustalonym (np. pierwszym) miejscu, to pozostałe dwie cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{2}$ sposobów,

albo

- jeżeli na ustalonym miejscu stoi jedna z cyfr 2 lub 3, to trzy cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{3}$ sposobów,

albo

- jeżeli cyfry 1 stoją na ustalonych trzech miejscach, to jeśli w liczbie występuje n cyfr 2, to cyfry 2 i 3 można rozmieścić na $\binom{7}{n}$ sposobów dla przynajmniej jednej konkretnej liczby n,

albo

- jest 8 rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.
Zdający

- zapisze, że liczba rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych jest równa np. $\binom{10}{3}\cdot 2^7$

albo

- zapisze, ile jest liczb w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy,

albo

- zapisze osiem rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy oraz w przynajmniej jednym przypadku zapisze liczbę takich liczb, np. $\binom{10}{3}\cdot 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.
Zdający

- zapisze, że jest $\binom{10}{3}\cdot 2^7 = 15360$ liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zsumuje liczby otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy i zapisze, że jest ich 15360.

Uwagi:

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych bez użycia symbolu Newtona.
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przedstawia zapisy, dla których brak bezpośredniej interpretacji kombinatorycznej i zapisom tym nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to nie może otrzymać maksymalnej liczby punktów, przy czym za rozwiązanie, zawierające

jedynie zapisy pojedynczych liczb lub symboli Newtona (typu 120, 128, $\binom{10}{7}$), bez stosownych objaśnień, zdający otrzymuje **0 punktów**, a za rozwiązanie, zawierające jedynie zapisy działań na liczbach (typu $120 \cdot 128 = 15\,360$), bez stosownych objaśnień zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

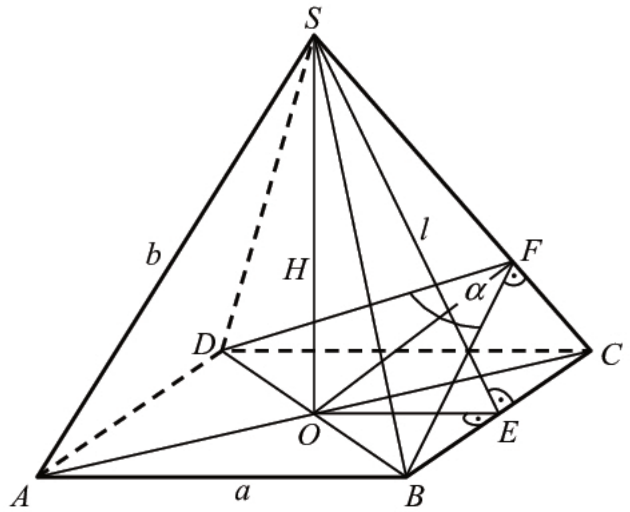
3. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym części zapisanych liczb lub działań na liczbach nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to za takie rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Zdający może skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona i zapisać:
$\binom{10}{3} \cdot \left\{ \binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right\} = \binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$.

Zadanie 15. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.4, 9.6).

Przykładowe rozwiązanie

Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. Każdy z nich różni się zestawem i kolejnością zastosowanych związków między odcinkami w ostrosłupie. Przyjmijmy następujące oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|OE| = \frac{a}{2}$, $|\sphericalangle BFO| = 60^\circ$.

Ponieważ trójkąt BFO jest prostokątny, stąd $\frac{|BO|}{|BF|} = \sin 60^\circ$. Zatem

$$|BF| = \frac{|BO|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trójkąty SEC i BFC są podobne, stąd $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$, czyli $\frac{l}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}$. Zatem $l = \frac{b\sqrt{6}}{3}$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych EOS i BOS, skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ 25+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25+\frac{a^2}{4}=\frac{2b^2}{3} \\ 25+\frac{a^2}{2}=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300+3a^2=8b^2 \\ 50+a^2=2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=75 \\ a^2=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=5\sqrt{3} \\ a=10 \end{cases}$$

Stąd pole P podstawy $ABCD$ ostrosłupa jest równe $P=a^2=100$, więc objętość ostrosłupa jest równa: $V=\frac{1}{3}\cdot 100\cdot 5=\frac{500}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SOC

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SOE,

albo

- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie BFD,

albo

- zapisze funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie OBF,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów SEC i BCF,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów SOC i OFC

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisze związki, z których można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, ale pominie jedno równanie potrzebne do zakończenia obliczeń, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **3 p.**
Zdający zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **4 p.**
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą oznaczającą wielkość, która pozwala obliczyć pole podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, popełniając błędy rachunkowe i konsekwentnie do tego obliczy objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V=\frac{500}{3}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup, którego podstawą nie jest kwadrat albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi, ale przy korzystaniu z własności figur, w których ten kąt nie występuje, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający odczyta wartość $\sin\sphericalangle BFO=\sin 60^\circ$ z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

Zadanie 16. (0−7)

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Przykładowe rozwiązanie

Niech $C=(x,y)$ będzie wierzchołkiem trapezu $ABCD$. Wówczas $C=\left(x,2-\frac{1}{2}x^2\right)$, gdzie $0<x<2$. Ponieważ $|AB|=4$, $|CD|=2x$, a wysokość trapezu jest równa $h=2-\frac{1}{2}x^2$, więc pole P tego trapezu określone jest wzorem

$$P(x)=\frac{4+2x}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)=(x+2)\cdot\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)=\frac{1}{2}\left(8+4x-2x^2-x^3\right)=4+2x-x^2-\frac{1}{2}x^3$$

dla każdej liczby rzeczywistej $0<x<2$.

Pochodna funkcji $P(x)=4+2x-x^2-\frac{1}{2}x^3$ jest równa $P'(x)=2-2x-\frac{3}{2}x^2$ dla $x\in(0,2)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej i badamy jej znak.

Ponieważ $P'(x)=-\frac{3}{2}\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{2}\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right)=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)$

oraz $-\frac{3}{2}(x+2)<0$ dla każdego $x\in(0,2)$, więc:

$P'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac{2}{3}$,

$P'(x)>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-\frac{2}{3}<0$ i $x\in(0,2)$, czyli dla $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$,

$P'(x)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-\frac{2}{3}>0$ i $x\in(0,2)$, czyli dla $x\in\left(\frac{2}{3},2\right)$.

Zatem w przedziale $\left(0,\frac{2}{3}\right\rangle$ funkcja P jest rosnąca, w przedziale $\left\langle\frac{2}{3},2\right)$ jest malejąca, a w punkcie $x=\frac{2}{3}$ osiąga maksimum. Jeżeli $x=\frac{2}{3}$, to $C=\left(\frac{2}{3},2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{16}{9}\right)$.

Uwaga:
Zdający może zauważyć, że z nierówności dla średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej wynika, że dla $x\in(0,2)$ iloczyn

$$(x+2)(4-x^2)=(x+2)(x+2)(2-x)=4\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)(2-x)$$

przyjmuje największą wartość równą

$$4\left(\frac{\frac{x}{2}+1+\frac{x}{2}+1+2-x}{3}\right)^3=4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \text{gdy } \frac{x}{2}+1=2-x,\ \text{czyli dla } x=\frac{2}{3}.$$

Takie rozumowanie zastępuje drugi etap rozwiązania.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy** etap składa się z trzech części:
  a) zapisanie długości podstawy CD i wysokości trapezu $ABCD$ w zależności od zmiennej x: $|CD|=2x$, $h=2-\frac{1}{2}x^2$,
  b) zapisanie pola trapezu $ABCD$ jako funkcji zmiennej x: $P(x)=\frac{4+2x}{2}\cdot\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)$ lub $P(x)=4+2x-x^2-\frac{1}{2}x^3$,
  c) określenie dziedziny funkcji P: $(0,2)$.

Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**, przy czym, jeżeli zdający od razu zapisze poprawnie pole trapezu w zależności od jednej zmiennej, to otrzymuje punkt za część a) i punkt za część b).

- **Drugi** etap składa się z trzech części:
  a) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(x)=4+2x-x^2-\frac{1}{2}x^3$:
  $$f'(x)=2-2x-\frac{3}{2}x^2\ ,$$
  b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji P: $x=\frac{2}{3}$ lub pochodnej funkcji f:
  $$x=-2,\ x=\frac{2}{3},$$

c) zbadanie znaku pochodnej funkcji P i uzasadnienie, że dla $x = \frac{2}{3}$ funkcja P osiąga wartość największą.

Uwaga:
Znak pochodnej zdający może zaznaczyć w inny sposób, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej.

- **Trzeci** etap.
  Obliczenie współrzędnych wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe:
$$C = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right).$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu P z pominięciem czynnika $\frac{1}{2}$, we wzorze na pole trapezu, lub z błędem rachunkowym, to może otrzymać co najwyżej **6 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze pole trapezu P z błędem rzeczowym, innym niż opisany w uwadze 1., to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo wyznaczy dziedzinę funkcji P, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji P z błędem rachunkowym i otrzyma jako P' funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku Δ lub o wyróżniku Δ równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za I etap rozwiązania.
4. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pochodną P' i współrzędne punktu C, ale nie poda poprawnego uzasadnienia, dotyczącego istnienia największej wartości funkcji P dla obliczonych współrzędnych, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.