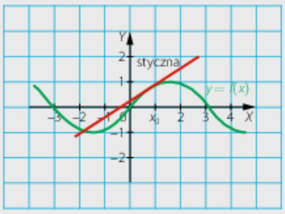
11.3.3. Styczna do krzywej

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y=f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.



Styczna może mieć z wykresem funkcji więcej niż jeden punkt wspólny.

Kąt α między przecinającymi się wykresami funkcji: $y=f(x)$, $y=g(x)$ – kąt między stycznymi do tych krzywych, poprowadzonymi w punkcie ich przecięcia.

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|f'(x_0)-g'(x_0)|}{|1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)|}$, gdy $1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)\neq 0$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|a_1-a_2|}{|1+a_1\cdot a_2|}$, gdy $1+a_1\cdot a_2\neq 0$ a_1, a_2 – współczynniki kierunkowe stycznych

11.3.4. Wzory na obliczanie pochodnej

$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	
$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$	$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$	$[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$
$(a)'=0$	$(ax+b)'=a$	$(ax^2+bx+c)'=2ax+b$
$\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

11.3.5. Monotoniczność funkcji

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a,b) oraz dla każdego argumentu $x\in(a,b)$:
- $f'(x)>0$, to funkcja f jest **rosnąca** w przedziale (a,b),
- $f'(x)<0$, to funkcja f jest **malejąca** w przedziale (a,b),
- $f'(x)=0$, to funkcja f jest **stała** w przedziale (a,b).

11.3.6. Ekstrema funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum
Jeżeli funkcja f osiąga ekstremum w punkcie x_0 i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0)=0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0, w którym $f(x_0)=0$ oraz
- $f'(x)>0$ dla (x_0-h, x_0) i $f'(x)<0$ dla (x_0, x_0+h), to funkcja f ma maksimum w punkcie x_0,
- $f'(x)<0$ dla (x_0-h, x_0) i $f'(x)>0$ dla (x_0, x_0+h), to funkcja f ma minimum w punkcie x_0.

11

ja
ów
2
2

8.	1 / 0	$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-1)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}\Rightarrow f'(-\sqrt{7})=\frac{2\sqrt{7}}{3}=$ $=1{,}763834...$	0–2

wyjaśnienie i więcej informacji
w vademecum maturalnym Wydawnictwa Operon

3

3.4. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

3.4.1. Równanie kwadratowe

Równanie postaci $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$ i $a,b,c\in R$, to równanie **kwadratowe**.
Liczby a,b,c – **współczynniki** równania.

Jeśli $a\neq 0, b\neq 0$ i $c\neq 0$, to równanie nazywamy **zupełnym**.
Jeśli $a\neq 0$ i $b=0$ lub $a\neq 0$ i $c=0$ lub $a\neq 0$, $b=0$ i $c=0$, to równanie nazywamy **niezupełnym**.

Pierwiastek równania kwadratowego – liczba, która spełnia równanie.
Rozwiązanie równania kwadratowego jest miejscem zerowym funkcji $y=ax^2+bx+c$.

Wyróżnik równania kwadratowego: $\Delta=b^2-4ac$.
Rozwiązując równanie zupełne, należy obliczyć wyróżnik równania. Równanie kwadratowe niezupełne można rozwiązać bez obliczania wyróżnika.

3.4.2. Liczba rozwiązań równania kwadratowego

PIERWIASTKI RÓWNANIA KWADRATOWEGO ZUPEŁNEGO $ax^2+bx+c=0$, GDZIE $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Dwa pierwiastki $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Jeden pierwiastek $x=-\frac{b}{2a}$	Nie ma pierwiastków.

PRZYKŁADY

$x^2+x-6=0$
$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25>0$
$x_1=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot 1}=-3,$
$x_2=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot 1}=2$

$2x^2+4x+2=0$
$\Delta=4^2-4\cdot 2\cdot 2=0$
$x=-\frac{4}{2\cdot 2}=-1$

$2x^2-x+1=0$
$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$
Nie ma rozwiązania.

PIERWIASTKI RÓWNANIA KWADRATOWEGO NIEZUPEŁNEGO

Postać równania	$ax^2=0$ $(a\neq 0, b=0$ i $c=0)$	$ax^2+bx=0$ $(a\neq 0, b\neq 0$ i $c=0)$	$ax^2+c=0$ $(a\neq 0, b=0$ i $c\neq 0)$	
			dla $-\frac{c}{a}>0$	dla $-\frac{c}{a}<0$
Rozwiązanie	Jeden pierwiastek $x=0$	Dwa pierwiastki $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$	Dwa pierwiastki $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Nie ma rozwiązania.

3.4.3. Wzory Viete'a

Jeśli $a\neq 0$ i $\Delta>0$, to równanie kwadratowe $ax^2+bc+c=0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2, dla których prawdziwe są wzory

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ – suma pierwiastków

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ – iloczyn pierwiastków

334 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

na stronie 334

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
13.	Rozwiązanie: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ $(m+5)^2 = x_1 x_2 \Rightarrow (m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$ $m = -3 \vee m = -7$ – pierwsza liczba nie spełnia warunku $\Delta > 0$ $m = -7$	0–4
	Postęp: Zapisanie i rozwiązanie warunków: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$	1
	Istotny postęp: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = x_1 x_2$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań wszystkich warunków: $m = -7$	4
14.	Rozwiązanie: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\Delta BDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ $\frac{\lvert FB \rvert}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \lvert FB \rvert = \frac{a}{8} \Rightarrow \lvert DF \rvert = \frac{3a}{8}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	0–4
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\Delta BDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{8}$	1
	Istotny postęp: Obliczenie długości odcinka FB: $\frac{\lvert FB \rvert}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \lvert FB \rvert = \frac{a}{8}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie długości odcinka DF: $\lvert DF \rvert = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie kąta α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
15.	Rozwiązanie: $\sin 2x+\cos 4x=0 \Rightarrow \sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0$ $2\sin\frac{2x+\frac{\pi}{2}-4x}{2}\cos\frac{2x-\frac{\pi}{2}+4x}{2}=0 \Rightarrow \sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \vee \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=k\pi \vee \left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\ k\in C$	0–4
	Istotny postęp: Zapisanie równania w postaci: $\sin 2x+\cos 4x=0 \Rightarrow \sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0$ $2\sin\frac{2x+\frac{\pi}{2}-4x}{2}\cos\frac{2x-\frac{\pi}{2}+4x}{2}=0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie alternatywy równań: $\sin\frac{2x+\frac{\pi}{2}-4x}{2}=0 \vee \cos\frac{2x-\frac{\pi}{2}+4x}{2}=0$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=k\pi \vee \left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\ k\in C$	3
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $x=\frac{\pi}{4}-k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3},\ k\in C$	4
16.	Rozwiązanie: $\pi r^2 h=\pi \Rightarrow h=\frac{1}{r^2}$ $P(x)=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{2\pi r}{r^2}+2\pi r^2,\ P(x)=2\pi\frac{1+r^3}{r},\ r>0$ $P'(x)=2\pi\frac{2r^3-1}{r^2},\ P'(x)=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ Po przeanalizowaniu znaków pochodnej otrzymujemy: w punkcie $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji.	0–7
	I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej pole walca Wyznaczenie zależności między promieniem podstawy i wysokością walca: $\pi r^2 h=\pi \Rightarrow h=\frac{1}{r^2}$	1
	Wyznaczenie wzoru na pole całkowite walca: $P(r,h)=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{2\pi r}{r^2}+2\pi r^2,\ P(r)=2\pi\frac{1+r^3}{r}$	2
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $r\in(0,+\infty)$	3 (za I część przyznaje się 3 pkt)
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji: $P'(r)=2\pi\frac{2r^3-1}{r^2}$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $P'(r)=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	5
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego maksimum funkcji: $P'(r)>0$ dla $r\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty\right)$, $P'(r)<0$ dla $r\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty\right)$, a maleje w przedziale $\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, stąd w punkcie $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum będące jednocześnie najmniejszą wartością funkcji, więc wymiary walca: $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $h=\sqrt[3]{4}$.	6 (za II część przyznaje się 3 pkt)
	III część Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji: $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=3\pi\sqrt[3]{2}$	7 (za III część przyznaje się 1 pkt)
17.	Rozwiązanie: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu $P(B_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_2)=\frac{7}{10}$ $P(A/B_1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}$, $P(A/B_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{10}{45}$ $P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{15}{45}+\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{45}=\frac{23}{90}$	0–5
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu	1
	Istotny postęp: Obliczenie prawdopodobieństw: $P(B_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_2)=\frac{7}{10}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie prawdopodobieństw: $P(A/B_1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}$, $P(A/B_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	3
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia w postaci: $P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{7}{10}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	4
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A: P(A)=\frac{23}{90}$	5

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
18.	Rozwiązanie: Zapisujemy układ: $\begin{cases} x+y+z=63 \\ (y+15)^2=(x-1)(z+37) \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{cases}$, po rozwiązaniu otrzymujemy: $\begin{cases} x=25 \\ y=21 \\ z=17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=55 \\ y=21 \\ z=-13 \end{cases}$	0–5
	Istotny postęp: Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x+y+z=63 \\ (y+15)^2=(x-1)(z+37) \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{cases}$	2 (1 pkt, gdy zapisano tylko dwa równania)
	Pokonanie zasadniczych trudności: Przekształcenie układu do równania kwadratowego, np.: $x^2-80x+1375=0$	3
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $\begin{cases} x=25 \\ y=21 \\ z=17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=55 \\ y=21 \\ z=-13 \end{cases}$	5 (4 pkt, gdy popełniono błąd rachunkowy)