WPISUJE ZDAJĄCY

KOD

IMIĘ I NAZWISKO *

* nieobowiązkowe

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ

MATEMATYKA – POZIOM ROZSZERZONY

dysleksja

STYCZEŃ 2015

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1–18). Ewentualny brak stron zgłoś nauczycielowi nadzorującemu egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadań otwartych może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Podczas egzaminu możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Na tej stronie wpisz swój kod oraz imię i nazwisko.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla osoby sprawdzającej.

Powodzenia!

Czas pracy:
180 minut

Liczba punktów
do uzyskania: 50

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{2x^2-x}{x+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq -1$. Pochodna funkcji f w punkcie $x=1$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. 3

Zadanie 2. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ jest równa

A. 0 B. 4 C. $\frac{16}{3}$ D. $+\infty$

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{4\log_5 2}}$ jest równa

A. $\log_5 2$ B. 2 C. 5 D. 16

Zadanie 4. (0–1)

Prosta o równaniu $y=-2x+4$ tworzy z osią Ox kąt rozwarty α. Wtedy $\sin 2\alpha$ przyjmuje wartość

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

Zadanie 5. (0–1)

Prosta o równaniu $x-2y+7=0$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $S=(-2, 0)$. Wskaż równanie tego okręgu.

A. $(x+2)^2+y^2=5$

B. $(x-2)^2+y^2=5$

C. $(x+2)^2+y^2=\sqrt{5}$

D. $x^2+(y+2)^2=\frac{9}{4}$

BRUDNOPIS

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	1	2	3	4	5
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

ZADANIA OTWARTE

W zadaniach 6–7 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia. W zadaniach 8–18 rozwiązania zapisz w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 6. (0–2)

Zbadaj, dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = a^2x^{2015} + (8 + a^2)x^{2014} - 7a + 6$ przez dwumian $x + 1$ jest równa co najmniej 4. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego największej spośród takich liczb a.

Zadanie 7. (0–2)

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1)}{(2n - 3)^2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. (0–2)

Ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, jest zbieżny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest 7 razy większa od sumy wszystkich jego wyrazów o numerach parzystych. Wyznacz iloraz tego ciągu geometrycznego.

Zadanie 9. (0–2)

Ile jest wszystkich parzystych liczb sześciocyfrowych, do zapisu których użyto cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i w których cyfra 5 występuje dokładnie trzy razy?

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	6	7	8	9
	Maks. liczba pkt	2	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 10. (0–3)

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x$ określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Zadanie 11. (0–3)

Udowodnij, że jedynym punktem o obu współrzędnych całkowitych, należącym do krzywej o równaniu $y = \sqrt{2}x^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2} - 2$, jest punkt $P = (4, -2)$.

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	10	11
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 12. (0–3)

W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB, gdzie $|AB| = a$ oraz $|AC| = |BC| = b$, poprowadzono środkową AD długości x. Wykaż, że $x = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

Zadanie 13. (0–3)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right|$ i zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma dwa ujemne rozwiązania.

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	12	13
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 14. (0–3)

Wyznacz równanie stycznej do wykresu wielomianu $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$, która jest prostopadła do prostej $x - 2y - 6 = 0$.

Zadanie 15. (0–3)

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy bez zwracania trzy cyfry i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc w ten sposób liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3, jeżeli wiadomo, że iloczyn pierwszej i drugiej cyfry jest równy 8.

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	14	15
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

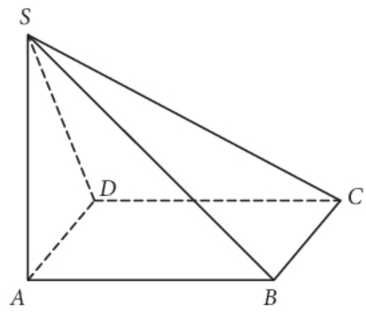
Zadanie 16. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których wierzchołek paraboli o równaniu $y = x^2 - 2kx + 2k^2 - 4k + 4$ należy do koła o środku $S = (3, 2)$ i promieniu $\sqrt{5}$.

Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	16
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 17. (0–6)

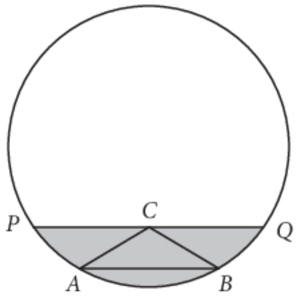
Kwadrat $ABCD$ o boku długości a jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Krawędź boczna AS ma również długość a i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek A i prostopadłą do krawędzi CS. Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	17
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 18. (0–7)

Cięciwa PQ długości $8\sqrt{2}$ podzieliła koło o promieniu $4\sqrt{3}$ na dwa odcinki kołowe. W odcinek kołowy, który nie zawiera środka koła, wpisujemy trójkąty równoramienne ABC tak, że podstawa AB jest równoległa do cięciwy PQ, a wierzchołek C jest środkiem tej cięciwy (zobacz rysunek). Wyznacz długości boków tego z trójkątów, który ma największe pole.



Wypełnia sprawdzający	Nr zadania	18
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS