PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z NOWĄ ERĄ 2014/2015

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	C	B	C	D	A

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11.2. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych.

Rozwiązanie

Mamy $f'(x) = \dfrac{(2x^2 - x)'(x+1) - (2x^2 - x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(4x-1)(x+1) - (2x^2 - x)}{(x+1)^2}$.

Zatem $f'(1) = \dfrac{(4 \cdot 1 - 1)(1+1) - (2 \cdot 1^2 - 1)}{(1+1)^2} = \dfrac{5}{4}$.

Odpowiedź

C

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11.1. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych. 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 4$$

Odpowiedź

B

Schemat punktowania

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. IV etap edukacyjny – poziom rozszerzony 1.2. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Rozwiązanie

$\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{3}{4\log_5 2}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4\log_5 2}} = 2^{\frac{1}{\log_5 2}} = 2^{\log_2 5} = 5$

Odpowiedź
C

Schemat punktowania
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 4. (0–1)

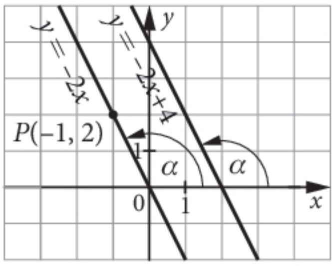
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°. IV etap edukacyjny – poziom rozszerzony 6.5. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że proste $y = -2x + 4$ i $y = -2x$ są równoległe, więc tworzą z osią Ox ten sam kąt rozwarty α. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$|OP| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, więc $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Zatem $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$.



Odpowiedź
D

Schemat punktowania
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 4) oblicza odległość punktu od prostej. 5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.

Rozwiązanie
Promień okręgu r jest równy odległości środka okręgu S od stycznej:
$r=\frac{|-2+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. Równanie tego okręgu ma postać $(x+2)^2+y^2=5$.

Odpowiedź
A

Schemat punktowania
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

KLUCZ OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 6. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.4. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Przykładowe rozwiązanie
Z twierdzenia o reszcie wynika, że $R=W(-1)$, więc $W(-1)\geqslant 4$.

$a^2(-1)^{2015}+(8+a^2)(-1)^{2014}-7a+6\geqslant 4$

$-a^2+8+a^2-7a+6\geqslant 4$

$-7a\geqslant -10$

$a\leqslant \frac{10}{7}$

Zatem największa wartość parametru a jest równa $\frac{10}{7}=1{,}42857\ldots$

Kodujemy cyfry: 1, 4, 2.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zakoduje cyfry: 1, 4, 2.

Uwaga
Należy zakodować cyfry **otrzymanego** wyniku, a nie wyniku przybliżonego, zatem kodujemy cyfry 1, 4, 2, a nie 1, 4, 3.

Zadanie 7. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Przykładowe rozwiązanie

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że

$$2+5+8+\cdots+(3n-1)=\frac{2+(3n-1)}{2}\cdot n=\frac{3n^2+n}{2}, \text{ więc } a_n=\frac{3n^2+n}{2(2n-3)^2}.$$

Obliczamy granicę: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2(2n-3)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(2-\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{3}{8}=0,375.$

Kodujemy cyfry: 3, 7, 5.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zakoduje cyfry: 3, 7, 5.

Zadanie 8. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Przykładowe rozwiązanie

Ciąg geometryczny jest zbieżny do zera, gdy jego iloraz spełnia warunek $|q|<1$. Wtedy również suma wszystkich jego wyrazów, czyli szereg geometryczny, jest zbieżna. Szereg utworzony ze wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego o numerach parzystych jest również zbieżnym szeregiem geometrycznym o ilorazie $q'=q^2$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego możemy zapisać równość: $\frac{a_1}{1-q}=7\cdot\frac{a_1\cdot q}{1-q^2}$. Z założenia, że $a_1>0$ (a więc różne od zera) oraz $|q|<1$ (a więc $q\neq 1$), możemy obie strony równania podzielić przez a_1 i pomnożyć przez $q-1$. Otrzymujemy wówczas: $1=\frac{7q}{1+q}$, czyli $1+q=7q$. Stąd $q=\frac{1}{6}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**
gdy wywnioskuje, że szereg utworzony ze wszystkich wyrazów zbieżnego ciągu geometrycznego o numerach parzystych jest zbieżnym szeregiem geometrycznym.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**
gdy zauważy, że $q'=q^2$ i obliczy iloraz tego ciągu: $q=\frac{1}{6}$.

Zadanie 9. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Przykładowe rozwiązanie

Tworząc liczby sześciocyfrowe spełniające warunki zadania, musimy uwzględnić to, że:
– liczba ma być parzysta, zatem cyfrę jedności wybierzemy spośród $\{2, 4, 6\}$,
– mają być dokładnie trzy cyfry 5, zatem miejsca dla nich wybierzemy na $\binom{5}{3}$ sposobów (cyfrą jedności nie może być 5),
– pozostają jeszcze dwa puste miejsca, na które możemy wybrać po jednej cyfrze ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Zatem z reguły mnożenia otrzymujemy:

$$\underbrace{3}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 5}} \cdot \underbrace{5\cdot 5}_{\text{wybór pozostałych cyfr}} = 3\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 25 = 750.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zapisze regułę mnożenia z opisem, np.: $\underbrace{3}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 5}} \cdot \underbrace{5\cdot 5}_{\text{wybór pozostałych cyfr}}$

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy szukaną liczbę: 750.

Uwaga

Jeśli zdający zapisze $3\cdot\binom{5}{3}\cdot 5\cdot 5 = 750,$ to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 10. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6.5. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

Przykładowe rozwiązania

__I sposób__

Korzystamy ze wzorów $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ oraz

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ i przekształcamy wzór funkcji:

$$f(x) = 2 + \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x = 2 + \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$f(x) = 2 + 2\sin\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-2x\right)\cos\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}-2x\right) = 2 + 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(x) = 2 + \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ponieważ $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, więc $-\sqrt{3} \leqslant \sqrt{3}\cos\alpha \leqslant \sqrt{3}$, stąd
$2-\sqrt{3} \leqslant 2+\sqrt{3}\cos\alpha \leqslant 2+\sqrt{3}$, gdzie $\alpha = 2x - \frac{\pi}{6}$.
Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział: $\langle 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3} \rangle$.

<u>II sposób</u>

Korzystamy ze wzorów $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ oraz

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ i przekształcamy wzór funkcji:

$$f(x) = 2 + \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x$$

$$f(x) = 2 + 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6} + 2x\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6} - 2x\right) = 2 + 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$f(x) = 2 + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

Ponieważ $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, więc $-\sqrt{3} \leqslant \sqrt{3}\cos\alpha \leqslant \sqrt{3}$,
stąd $2-\sqrt{3} \leqslant 2+\sqrt{3}\cos\alpha \leqslant 2+\sqrt{3}$, gdzie $\alpha = \frac{\pi}{6} - 2x$.
Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział: $\langle 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3} \rangle$.

Schemat oceniania obu sposobów

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x) = 2 + \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

albo $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zastosowanie wzoru na sumę sinusów i zapisanie wzoru funkcji w postaci

$f(x) = 2 + \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ albo wzoru na sumę cosinusów i zapisanie wzoru

funkcji w postaci $f(x) = 2 + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Wyznaczenie zbioru wartości: $\langle 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3} \rangle$.

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	3.2. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równanie paraboli:

$$y = \sqrt{2}(x^2 - 8x + 16) - 2$$

$$y = \sqrt{2}(x-4)^2 - 2$$

$$y + 2 = \sqrt{2}(x-4)^2$$

Zauważmy, że dla całkowitych liczb x i y lewa strona jest liczbą całkowitą, a prawa strona jest liczbą niewymierną albo zerem w zależności od wartości x. Zatem równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-4)^2=0$, stąd $x=4$. Wtedy również $y+2=0$, czyli $y=-2$. Wynika stąd, że jedynym punktem o obu współrzędnych całkowitych należącym do paraboli o równaniu $y=\sqrt{2}x^2-8\sqrt{2}x+16\sqrt{2}-2$ jest punkt $P=(4,-2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Zapisanie równania w postaci $y=\sqrt{2}(x-4)^2-2$, gdzie $x, y \in \mathbf{C}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zapisanie równania w postaci $y+2=\sqrt{2}(x-4)^2$ i zauważenie, że po jego lewej stronie znajduje się liczba całkowita, a po prawej – iloczyn liczby niewymiernej i całkowitej.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zapisanie wniosku: iloczyn liczby niewymiernej i całkowitej jest równy liczbie całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy liczba całkowita jest równa zero, czyli gdy $(x-4)^2=0$, stąd $x=4$. Wtedy $y+2=0$, czyli $y=-2$. Zatem jedynym punktem o obu współrzędnych całkowitych należącym do krzywej jest $P=(4,-2)$.

Uwaga

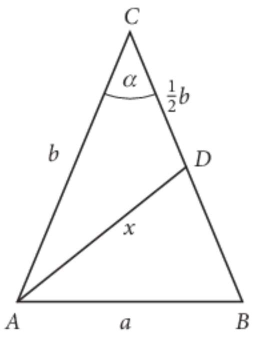
Zdający może przeprowadzić rozumowanie na równaniu w postaci $y=\sqrt{2}(x-4)^2-2$.

Zadanie 12. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkątów ADC i ABC i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x^2=\frac{5}{4}b^2-b^2\cos\alpha \\ a^2=2b^2-2b^2\cos\alpha \end{cases}$$

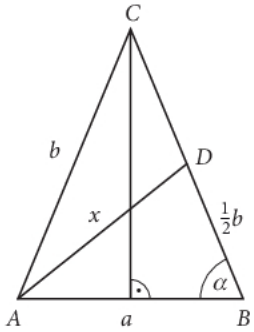
Drugie równanie dzielimy przez 2, a następnie odejmujemy równania stronami.

Otrzymujemy:

$x^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}b^2$

$x^2 = \frac{2a^2 + b^2}{4}$, czyli $x = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

II sposób



Stosujemy definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym i twierdzenie cosinusów w trójkącie ABD

i zapisujemy układ równań $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{2b} \\ x^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab\cos\alpha \end{cases}$

Podstawiamy wyznaczony cosinus do drugiego równania i otrzymujemy: $x^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2}$,

stąd $x^2 = \frac{2a^2 + b^2}{4}$, czyli $x = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

Schemat oceniania obu sposobów

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń (np. jak na rysunku) i zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABC lub ADC lub ABD lub użycie definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zapisanie układu równań $\begin{cases} x^2 = \frac{5}{4}b^2 - b^2\cos\alpha \\ a^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha \end{cases}$ albo $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{2b} \\ x^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab\cos\alpha \end{cases}$

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Wyprowadzenie z układu równania bez cosinusa, np. $x^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}b^2$ albo $x^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2}$

i wyznaczenie x: $x = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

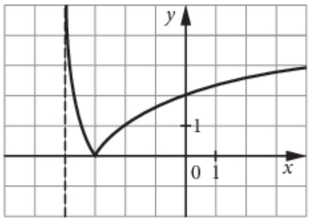
Zadanie 13. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający: 2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw. 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$. IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

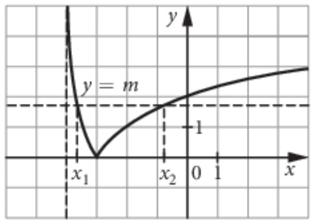
Przykładowe rozwiązanie

Wykonujemy kolejne przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \xrightarrow{\vec{u}=[-4,0]} h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) \xrightarrow{|h(x)|} f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right|,\ D_f = (-4, \infty)$$



Następnie interpretujemy graficznie równanie z parametrem (rysunek obok). Żeby równanie miało dwa ujemne rozwiązania x_1 i x_2, musi być spełniony warunek $m \in (0, 2)$.



Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Narysowanie wykresu funkcji $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Narysowanie w tym samym układzie współrzędnych wykresu $y = m$ i zaznaczenie punktów przecięcia obu wykresów.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Podanie odpowiedzi: Równanie ma dwa ujemne rozwiązania dla $m \in (0, 2)$.

Zadanie 14. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy prostą do postaci kierunkowej: $y = \frac{1}{2}x - 3$. Z warunku prostopadłości, styczna do wykresu wielomianu ma równanie $y = -2x + b$. Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy pochodnej wielomianu w punkcie styczności $P = (x_0, f(x_0))$: $a = f'(x_0) = -2$.

Wyznaczamy funkcję pochodną wielomianu: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ i zapisujemy równanie:

$3x_0^2 - 6x_0 + 1 = -2$

$3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \quad |:3$

$(x_0 - 1)^2 = 0$

$x_0 = 1, \quad f(x_0)f(1) = -1$, czyli punkt styczności $P = (1, -1)$.

Wyznaczamy równanie stycznej, korzystając ze wzoru $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$y + 1 = -2(x - 1)$, zatem $y = -2x + 1$.

Uwaga

Zdający może wyznaczyć równanie stycznej, korzystając z informacji, że punkt P należy do stycznej o równaniu $y = -2x + b$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Wykorzystanie warunku prostopadłości i zapisanie równości: $a = f'(x_0) = -2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Wyznaczenie funkcji pochodnej: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ i rozwiązanie równania:

$f'(x_0) = -2$ dla $x_0 = 1$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Obliczenie $f(1) = -1$ i podanie równania stycznej: $y = -2x + 1$.

Zadanie 15. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzywyrazowe ciągi o różnych wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, czyli wariacje bez powtórzeń.

Wprowadzamy oznaczenia:

A – utworzono liczbę podzielną przez 3,

B – iloczyn pierwszej i drugiej cyfry wynosi 8.

Zauważmy, że liczba jest podzielna przez 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają wariacje postaci: $(1, 8, a)$, $(2, 4, b)$, $(4, 2, c)$, $(8, 1, d)$, gdzie trzeci wyraz każdego z tych ciągów można wybrać na 7 sposobów (wyrazy nie mogą się powtórzyć).
Zatem $|B| = 4 \cdot 7$.
Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają wariacje postaci: $(1, 8, a)$, $(2, 4, b)$, $(4, 2, c)$, $(8, 1, d)$, przy czym $3 | a + 9$ i $3 | b + 6$ i $3 | c + 6$ i $3 | d + 9$. Ponieważ suma dwóch pierwszych cyfr w każdym z wymienionych przypadków jest podzielna przez 3, więc
$a, b, c, d \in \{3, 6, 9\}$. Zatem $|A \cap B| = 4 \cdot 3$.
Stąd $P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{3}{7}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **1 pkt**

Wprowadzenie oznaczeń, np.:
A – utworzono liczbę podzielną przez 3,
B – iloczyn pierwszej i drugiej cyfry wynosi 8
i zauważenie, że liczba jest podzielna przez 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, oraz że trzeba obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Obliczenie $|B| = 4 \cdot 7$ lub $|A \cap B| = 4 \cdot 3$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego $P(A | B) = \frac{3}{7}$.

Zadanie 16. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 4.12. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). IV etap edukacyjny – poziom rozszerzony 8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności. 2.2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$.

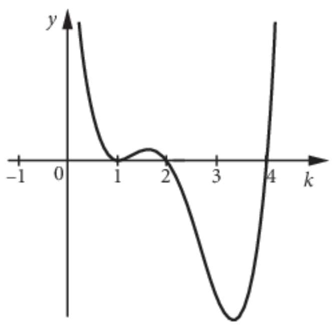
Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{2k}{2} = k$$

$$y_w = k^2 - 2k^2 + 2k^2 - 4k + 4 = k^2 - 4k + 4$$

Wierzchołek $W = (x_w, y_w)$ należy do koła, gdy jego współrzędne spełniają nierówność:
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 5$. Podstawiamy współrzędne wierzchołka:
$(k - 3)^2 + (k^2 - 4k + 4 - 2)^2 \leqslant 5$
i porządkujemy nierówność:
$k^2 - 6k + 9 + (k^2 - 4k + 2)(k^2 - 4k + 2) \leqslant 5$
$k^2 - 6k + 9 + k^4 - 8k^3 + 20k^2 - 16k + 4 - 5 \leqslant 0$
$k^4 - 8k^3 + 21k^2 - 22k + 8 \leqslant 0$
Rozkładamy wielomian na czynniki, wykorzystując twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych i dzielenie przez dwumian. Otrzymujemy np.:
$(k - 1)(k - 2)(k^2 - 5k + 4) \leqslant 0$
$(k - 1)^2(k - 2)(k - 4) \leqslant 0$
Pierwiastkami wielomianu są: $k_1 = 1$ (dwukrotny), $k_2 = 2$, $k_3 = 4$.
Szkicujemy poglądowy wykres i odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności:



Wierzchołek paraboli należy do danego koła dla $k \in \{1\} \cup \langle 2, 4 \rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka: $\begin{cases} x_w = k \\ y_w = k^2 - 4k + 4 \end{cases}$ lub zapisanie nierówności: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zapisanie nierówności wynikającej z faktu, że wierzchołek paraboli należy do koła:
$(k - 3)^2 + (k^2 - 4k + 2)^2 \leqslant 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **4 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej, np.: $(k - 1)(k - 2)(k^2 - 5k + 4) \leqslant 0$
lub $(k - 1)^2(k - 2)(k - 4) \leqslant 0$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci uporządkowanej: $k^4 - 8k^3 + 21k^2 - 22k + 8 \leqslant 0$
i poprzestanie na tym lub dalej popełni błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **5 pkt**

Błąd w wyznaczaniu pierwiastków wielomianu i konsekwentna odpowiedź albo usterka w rozwiązaniu nierówności („zgubienie” jedynki, niedomknięcie przedziału).

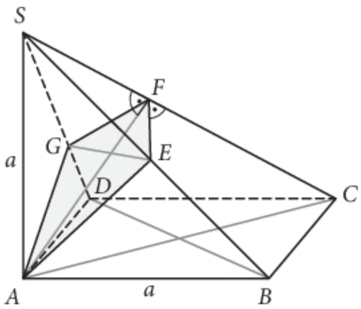
Rozwiązanie pełne .... **6 pkt**

Rozwiązanie nierówności: $k \in \{1\} \cup \langle 2, 4 \rangle$.

Zadanie 17. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9.2. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. IV etap edukacyjny – poziom podstawowy 7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Przykładowe rozwiązanie



Ściana ABS jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, więc $|SB| = a\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACS mamy: $|SC|^2 = |AC|^2 + |AS|^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2$, czyli $|SC| = a\sqrt{3}$.
Zauważmy, że w przekroju otrzymujemy deltoid $AEFG$, musimy więc wyznaczyć długości jego przekątnych AF oraz EG. Z faktu, że płaszczyzna przekroju jest prostopadła do krawędzi CS wynika, że AF jest wysokością trójkąta prostokątnego ACS opuszczoną na przeciwprostokątną.

Korzystając np. ze wzoru na pole trójkąta, mamy: $\frac{|AC|\cdot|AS|}{2} = \frac{|SC|\cdot|AF|}{2}$, stąd

$a^2\sqrt{2} = a\sqrt{3}\cdot|AF|$, czyli $|AF| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AFS obliczamy:

$|SF|^2 = |AS|^2 - |AF|^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3a^2}{9}$, czyli $|SF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Zauważmy dalej, że prostokątne są trójkąty BCS (np. z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych) i FES (bo przekrój jest prostopadły do CS). Ponadto z cechy (kkk) trójkąt BCS jest podobny do trójkąta FES. Prawdziwa jest zatem równość: $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|SF|}{|SB|}$, z której wynika, że

$|SE| = \frac{|SC|\cdot|SF|}{|SB|} = \frac{a\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{2}}$, zatem $|SE| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Zauważmy jeszcze, że $\triangle EGS \sim \triangle BDS$ w skali $k = \frac{|SE|}{|SB|} = \frac{1}{2}$, więc $|EG| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Możemy już obliczyć pole przekroju: $P_{AEFG} = \frac{1}{2}\cdot|AF|\cdot|EG| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń (np. jak na rysunku), zauważenie, że przekrojem ostrosłupa jest deltoid $AEFG$ i obliczenie: $|SB| = a\sqrt{2}$, $|SC| = a\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Obliczenie przekątnej AF deltoidu $AEFG$: $|AF| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **4 pkt**

Obliczenie $|SF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i zauważenie, że trójkąt BCS jest prostokątny i podobny do trójkąta FES, stąd $|SE| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy $|SF| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i poprzestanie na tym lub dalej popełni błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **5 pkt**

Zauważenie, że $\triangle EGS \sim \triangle BDS$ w skali $k = \frac{|SE|}{|SB|} = \frac{1}{2}$, stąd $|EG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i poprzestanie na tym lub rozwiązanie do końca z błędem rachunkowym.

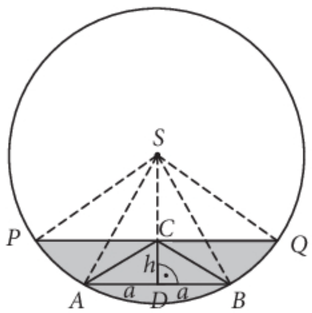
Rozwiązanie pełne .... **6 pkt**

Obliczenie pola deltoidu: $P_{AEFG} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 18. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Przykładowe rozwiązanie



Wprowadzamy oznaczenia np. jak na rysunku. Zauważmy, że $|SP| = 4\sqrt{3}$,

$|PC| = \frac{1}{2}|PQ| = 4\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie PCS mamy:

$|SC|^2 = |SP|^2 - |PC|^2 = (4\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2 = 16$, więc $|SC| = 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie DBS mamy:

$|SB|^2 = |SD|^2 + |DB|^2$

$(4\sqrt{3})^2 = (4+h)^2 + a^2$

$a^2 = 32 - 8h - h^2$

$a = \sqrt{32 - 8h - h^2}$

Zatem pole trójkąta ABC w zależności od jego wysokości h wyraża się wzorem:

$P_{ABC}(h) = \sqrt{32 - 8h - h^2} \cdot h = \sqrt{-h^4 - 8h^3 + 32h^2}$,

gdzie dziedziną tej funkcji jest zbiór D: $h \in (0,\ 4\sqrt{3} - 4)$.

Chcemy obliczyć, dla jakiej wysokości $h \in (0,\ 4\sqrt{3} - 4)$ funkcja P_{ABC} określona wzorem

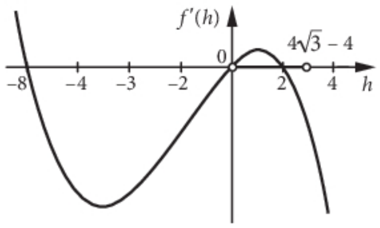
$P_{ABC}(h) = \sqrt{-h^4 - 8h^3 + 32h^2}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja $y = \sqrt{x}$ jest rosnąca, wystarczy zbadać funkcję $f(h) = -h^4 - 8h^3 + 32h^2$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji: $f'(h) = -4h^3 - 24h^2 + 64h,\ D' = D$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $f'(h) = 0 \iff -4h(h^2 + 6h - 16) = 0$.

Stąd $h \in \{-8, 0, 2\}$.



Badamy znak pochodnej funkcji f w dziedzinie:

$f'(h) > 0$ dla $h \in (0, 2)$ oraz $f'(h) < 0$ dla $h \in (2, 4\sqrt{3} - 4)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(0,\ 2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2, 4\sqrt{3} - 4)$. Wynika stąd, że dla $h = 2$ funkcja f przyjmuje wartość największą, więc również pole $P_{ABC}(h)$ przyjmuje wartość największą w dziedzinie.

Pozostało nam wyznaczyć długości boków trójkąta ABC o największym polu:

$a = \sqrt{32 - 8h - h^2} = 2\sqrt{3},\ |AB| = 2a = 4\sqrt{3},\ |AC| = |BC| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$.

Ogólny schemat oceniania

Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego za pomocą rachunku różniczkowego składa się z trzech etapów:

1. Zbudowanie modelu matematycznego (**3 punkty**).
2. Zbadanie tego modelu (**3 punkty**).
3. Wyciągnięcie wniosków, końcowe obliczenia itp. (**1 punkt**).

W pierwszych dwóch etapach można wyróżnić następujące części:

- 1. a) wybór zmiennej i wyrażenie za pomocą tej zmiennej wielkości, które będą potrzebne do zdefiniowania funkcji,
- 1. b) zdefiniowanie funkcji jednej zmiennej,
- 1. c) określenie dziedziny tej funkcji,
- 2. a) wyznaczenie pochodnej i jej dziedziny,
- 2. b) obliczenie miejsc zerowych tej pochodnej,
- 2. c) uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja przyjmuje wartość najmniejszą/największą.

Za poprawne rozwiązanie każdej z powyższych części zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile **poprzednia część danego etapu** została zrealizowana bezbłędnie.

W tym przypadku:

1. a) Wprowadzenie oznaczeń (np. jak na rysunku), wyznaczenie długości odcinka SC: $|SC| = 4$ oraz uzależnienie a od h: $a = \sqrt{32 - 8h - h^2}$.
1. b) Zapisanie pola trójkąta ABC jako funkcji zmiennej h: $P_{ABC}(h) = \sqrt{32 - 8h - h^2} \cdot h$ lub $P_{ABC}(h) = \sqrt{-h^4 - 8h^3 + 32h^2}$.
1. c) Zapisanie warunków, jakie musi spełniać wysokość trójkąta ABC: $h \in (0, 4\sqrt{3} - 4)$.
2. a) Zauważenie, że ponieważ funkcja $y = \sqrt{x}$ jest rosnąca, wystarczy zbadać funkcję $f(h) = -h^4 - 8h^3 + 32h^2$. Wyznaczenie pochodnej: $f'(h) = -4h^3 - 24h^2 + 64h$, $D' = D$.
2. b) Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $f'(h) = 0 \iff h \in \{-8, 0, 2\}$.
2. c) Zbadanie znaku pochodnej w dziedzinie: $f'(h) > 0$ dla $h \in (0, 2)$ oraz $f'(h) < 0$ dla $h \in (2, 4\sqrt{3} - 4)$, określenie monotoniczności funkcji f: w przedziale $(0, 2\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 2, 4\sqrt{3} - 4)$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $h = 2$ funkcja f (więc również P_{ABC}) przyjmuje wartość największą w dziedzinie.
3. Wyznaczenie długości boków trójkąta ABC o największym polu: $|AB| = 2a = 4\sqrt{3}$, $|AC| = |BC| = 4$.