# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
# Z NOWĄ ERĄ 2014/2015

# MATEMATYKA
## POZIOM PODSTAWOWY

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

# KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

| Nr zadania | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odpo-wiedź | B | D | A | A | B | B | B | C | C | A | C | B | B | A | D | B | D | A | A | B | D | B | A |

**Zadanie 1. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 1.7. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający oblicza błąd względny przybliżenia. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 2. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.9. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykonuje obliczenia procentowe. |

**Odpowiedź**
D

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 3. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 2.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający używa wzorów skróconego mnożenia.<br>1.3. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach. |

**Odpowiedź**
A

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 4. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 2.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający używa wzorów skróconego mnożenia.<br>3.3. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. |

**Odpowiedź**
A

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 5. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający:<br>3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.<br>4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 6. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4. Funkcje. Zdający:<br>14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.<br>4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 7. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający:<br>6) wykorzystuje definicję logarytmu.<br>4) stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 8. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.4. Funkcje.<br>Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$. |

**Odpowiedź**
C

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 9. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.7. Funkcje.<br>Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.<br>3.5. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.<br>1.8. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej. |

**Odpowiedź**
C

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 10. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 4.10. Funkcje.<br>Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). |

**Odpowiedź**
A

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 11. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej.<br>Zdający oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej. |

**Odpowiedź**
C

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 12. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 5.1. Ciągi.<br>Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 13. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 5.4. Ciągi.<br>Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 14. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3.2. Równania i nierówności.<br>Zdający wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.<br>4.7. Funkcje.<br>Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. |

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 15. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1.2. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych). |

**Odpowiedź**

D

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 16. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii | 10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 17. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7.2. Planimetria.<br>Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu. |

**Odpowiedź**

D

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 18. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 6.1. Trygonometria.<br>Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°. |

**Odpowiedź**
A

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 19. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 7. Planimetria. Zdający:<br>1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.<br>4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. |

**Odpowiedź**
A

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 20. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania. |

**Odpowiedź**
B

**Schemat punktowania**
1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 21. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | III etap edukacyjny<br>9.4. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.<br>Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.<br>IV etap edukacyjny – poziom podstawowy<br>10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. |

**Odpowiedź**

D

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 22. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | III etap edukacyjny<br>11.2. Bryły.<br>Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli. |

**Odpowiedź**

B

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

**Zadanie 23. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 9. Stereometria. Zdający:<br>3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą).<br>6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości. |

**Odpowiedź**

A

**Schemat punktowania**

1 pkt – za poprawną odpowiedź
0 pkt – za błędną odpowiedź lub brak odpowiedzi

# KLUCZ OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

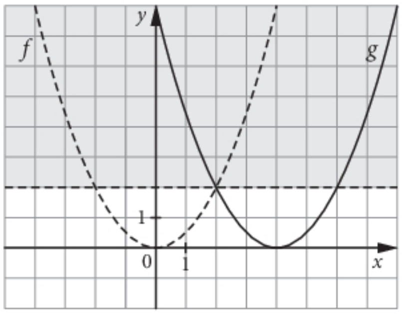
## Zadanie 24. (0–2)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 4. Funkcje. Zdający:<br>7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru.<br>3) odczytuje z wykresu własności funkcji.<br>4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, a następnie przesuwamy go o 4 jednostki w prawo, otrzymując wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$.
Z wykresu odczytujemy, że $g(x) > 2$ dla $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.




**<u>II sposób</u>**

Z informacji o przesunięciu wnioskujemy, że $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ i zapisujemy nierówność:

$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$
$(x-4)^2 > 4$
$x^2 - 8x + 16 > 4$
$x^2 - 8x + 12 > 0$
$\Delta = 16$
$\sqrt{\Delta} = 4$
$x_1 = \frac{8-4}{2} = 2$ lub $x_2 = \frac{8+4}{2} = 6$
$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

albo

$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$
$(x-4)^2 > 4$
$x - 4 > 2$ lub $x - 4 < -2$
$x > 6$ lub $x < 2$
$x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

**Schemat oceniania obu sposobów**

**Zdający otrzymuje ............................................................ 1 pkt**
gdy narysuje wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ lub zapisze nierówność $\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$.

**Zdający otrzymuje ............................................................ 2 pkt**
gdy zapisze zbiór rozwiązań: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$.

## Zadanie 25. (0–2)

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 3.8. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**

Zakładamy, że $x \neq -3$ i stosujemy wzór skróconego mnożenia $\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = 1 - x$, skracamy ułamek i otrzymujemy $x - 3 = 1 - x$, więc $x = 2$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**

gdy założy, że $x \neq -3$ i uprości równanie do postaci $x - 3 = 1 - x$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**

gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x = 2$.

**Uwaga**
Jeżeli zdający uprości równanie bez założenia $x \neq -3$ i wyznaczy rozwiązanie równania: $x = 2$, to otrzymuje **1 punkt**.

**<u>II sposób</u>**

Zakładamy, że $x \neq -3$ i przekształcamy równanie do postaci $x^2 - 9 = (1 - x)(x + 3)$, mnożymy wyrażenia w nawiasach i redukujemy wyrazy podobne

$x^2 - 9 = -x^2 - 2x + 3$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe

$\Delta = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

Ponieważ $x_1 = -3$ nie spełnia założenia, rozwiązaniem równania jest $x = 2$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**

gdy założy, że $x \neq -3$ i uprości równanie do postaci $2x^2 + 2x - 12 = 0$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**

gdy rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie $x_1 = -3$ i zapisze odpowiedź $x = 2$.

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie napisze założenia $x \neq -3$ i poda odpowiedź $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 26. (0–2)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>** (model klasyczny)

Z reguły mnożenia wyznaczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$. Niech $A$ oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek. Z reguły mnożenia obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, czyli $|A| = 7 \cdot 6 = 42$. Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**
gdy obliczy $|\Omega| = 90$ i $|A| = 42$ lub też $|\Omega| = 45$ i $|A| = 21$ (w doświadczeniu losowym nie jest istotna kolejność losowania).

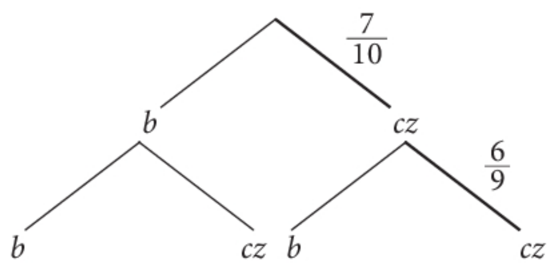
**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**
gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający nie skróci ułamka i poda odpowiedź $P(A) = \frac{42}{90}$ lub w innej równoważnej postaci, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika jasno, że zdający rozróżnia pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$ (np. pojawi się jedynie zapis $10 \cdot 9 = 90$ **albo** $7 \cdot 6 = 42$ bez żadnego opisu czy powszechnie używanej symboliki), to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający uzyska wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów**.

**<u>II sposób</u>** (metoda drzewa)

Losowanie z pudełka kolejno 2 piłeczek bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie $b$ oznacza wylosowanie białej piłeczki, a $cz$ – czarnej piłeczki. Pogrubiona gałąź drzewa odpowiada zdarzeniu $A$ polegającemu na wylosowaniu 2 czarnych piłeczek.




Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia $A$ jest równe $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 pkt**
gdy narysuje drzewo i poprawnie zaznaczy prawdopodobieństwa przynajmniej na odcinkach gałęzi odpowiadającej zdarzeniu $A$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 pkt**
gdy obliczy prawdopodobieństwo $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

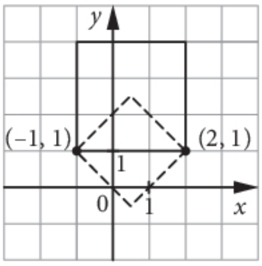
**Uwaga**

Jeżeli zdający nie narysuje drzewa i zapisze $P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów. |

**Przykładowe rozwiązanie**




Zaznaczamy dane punkty w układzie współrzędnych i rysujemy odcinek o końcach w tych punktach. Oznaczamy długość odcinka przez $a$, wtedy $a = 3$.

Zauważamy, że są dwie możliwości – zaznaczony odcinek może być:

- bokiem kwadratu – wtedy jego pole jest równe $P = a^2 = 9$,
- przekątną kwadratu – wtedy jego bok wynosi $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ i pole $P = \frac{9}{2}$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ............................................................................................................... **1 pkt**
gdy poprawnie obliczy odległość między danymi punktami oraz pole tylko jednego kwadratu.

**Zdający otrzymuje** ............................................................................................................... **2 pkt**
gdy poprawnie obliczy pola obu kwadratów.

**Zadanie 28. (0–2)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 1.5. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg. 3.4. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$\Delta = (3^9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (27^7) = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}$. Stąd $\Delta = 3^{18}(1 - 8 \cdot 3^3)$. Ostatecznie $\Delta = -215 \cdot 3^{18} < 0$.

Ponieważ $\Delta < 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **1 pkt**

gdy zapisze wyróżnik funkcji kwadratowej w postaci $\Delta = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **2 pkt**

gdy doprowadzi wyróżnik do postaci $\Delta = -215 \cdot 3^{18}$ i zapisze wniosek: ponieważ $\Delta < 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

<u>**II sposób**</u>

Ponieważ $a = 2 > 0$, więc parabola będąca wykresem funkcji kwadratowej $f$ ma ramiona skierowane do góry. Zatem $f$ nie ma miejsc zerowych, gdy druga współrzędna wierzchołka $y_w > 0$.

Obliczamy: $x_w = \frac{3^9}{4}$, $y_w = f(x_w) = 2 \cdot \frac{3^{18}}{16} - \frac{3^{18}}{4} + 27^7 = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$.

Stąd $y_w = 3^{18}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3^3\right)$. Ostatecznie $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18} > 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **1 pkt**

gdy zapisze drugą współrzędną wierzchołka w postaci $y_w = \frac{3^{18}}{8} - \frac{3^{18}}{4} + 3^{21}$
lub
gdy zauważy, że ramiona paraboli są skierowane do góry oraz zapisze wniosek: aby funkcja nie miała miejsc zerowych, musi być spełniony warunek $y_w > 0$ (ale nie obliczy $y_w$).

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **2 pkt**

gdy obliczy $y_w = \frac{215}{8} \cdot 3^{18}$ i zapisze wniosek: ponieważ parabola będąca wykresem funkcji $f$ ma ramiona skierowane do góry i $y_w > 0$, więc funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

**Zadanie 29. (0–2)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | 5.3. Ciągi.<br>Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Zarobki Bartka za każdy dzień pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 20$ zł i $r = 3$ zł. Wypłata po 8 tygodniach pracy jest równa sumie 40 wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zatem $S_{40} = \frac{2 \cdot 20 + 39 \cdot 3}{2} \cdot 40 = 3140$, więc po 8 tygodniach pracy Bartek otrzyma 3140 zł.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **1 pkt**

gdy zauważy, że zarobki za kolejne dni pracy tworzą 40-wyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 20$ zł i $r = 3$ zł.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **2 pkt**

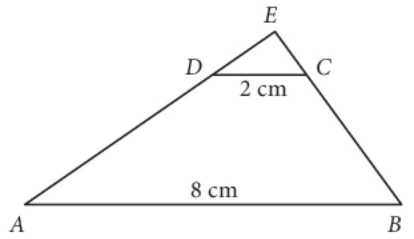
gdy obliczy wartość sumy $S_{40} = 3140$.

**Zadanie 30. (0–2)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 7.3. Planimetria.<br>Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. |

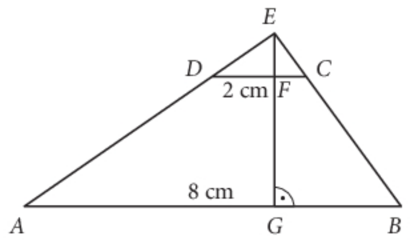
**Przykładowe rozwiązania**

**<u>I sposób</u>**




Trójkąt $ABE$ jest podobny do trójkąta $DCE$ w skali $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4.$ Z zależności między polami figur podobnych mamy: $P_{ABE} = k^2 \cdot P_{DCE} = 32 \text{ cm}^2$, więc $P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{DCE} = 30 \text{ cm}^2$.

**<u>II sposób</u>**




Trójkąt $ABE$ jest podobny do trójkąta $DCE$ w skali $k = \frac{|AB|}{|DC|} = 4.$ Pole trójkąta $DCE$ jest równe $2 \text{ cm}^2$, więc wysokość $|EF| = 2\,\text{cm}$. Z podobieństwa rozważanych trójkątów otrzymujemy $|EG| = k \cdot |EF| = 8\text{cm}$, zatem wysokość $FG$ trapezu $ABCD$ jest równa 6 cm. Stąd $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$.

**Schemat oceniania obu sposobów**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **1 pkt**
gdy stwierdzi, że trójkąt $ABE$ jest podobny do trójkąta $DCE$ w skali $k = 4$.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................................ **2 pkt**
gdy obliczy pole trapezu $P_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2$.

**Zadanie 31. (0–4)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | III etap edukacyjny<br>7.7. Równania.<br>Zdający za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Zaczynamy od uzgodnienia jednostek: prędkość jest w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, więc czas 4 min = $\frac{1}{15}$ h. Wprowadzamy oznaczenia:
$s$ – odległość hali od domu,
$t$ – czas pieszej wędrówki do hali,
$t - \frac{1}{15}$ – czas biegu do hali.
Na podstawie wzoru $s = v \cdot t$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$$

$$4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$$

$$t = \frac{1}{5}\,[\text{h}]$$

Zatem odległość hali od domu Janka $s = \frac{4}{5}$ km = 800 m.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **1 pkt**

Uzgodnienie jednostek, np. czas w godz. lub prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ i wprowadzenie oznaczeń, np.:
$s$ – odległość hali od domu,
$t$ – czas pieszej wędrówki do hali,
$t - \frac{1}{15}$ – czas biegu do hali.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **2 pkt**

Zapisanie układu równań, np.: $\begin{cases} s = 4t \\ s = 6\left(t - \frac{1}{15}\right) \end{cases}$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.: $4t = 6\left(t - \frac{1}{15}\right)$.

**Rozwiązanie pełne** ........ **4 pkt**

Obliczenie odległości między domem Janka a halą: $s = \frac{4}{5}$ km = 800 m.

**Uwaga**

Zdający może wprowadzić inne oznaczenia i zapisać równoważny układ równań lub bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{s}{4} - \frac{s}{6} = \frac{4}{60}$.

**Zadanie 32. (0–5)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:<br>1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej).<br>5) wyznacza współrzędne środka odcinka.<br>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.<br>4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych. |

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**

a) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $AB$: $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$ oraz współrzędne środka odcinka $AB$: $S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)$, stąd $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$. Prosta będąca osią symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ jest prostopadła do $AB$ i przechodzi przez punkt $S$, więc
$y = -2x + b$, $-\frac{3}{2} = -2 \cdot 3 + b$, stąd $b = \frac{9}{2}$.
Oś symetrii trapezu ma postać $y = -2x + \frac{9}{2}$.

b) Punkt $O$ będący środkiem podstawy $CD$ tego trapezu jest punktem przecięcia osi symetrii z podstawą $CD$. Prosta $CD$ jest równoległa do $AB$ i przechodzi przez punkt $C$, więc $y = \frac{1}{2}x + b$, $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, stąd $b = 2$. Prosta $CD$ jest zatem dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + 2$.
Współrzędne punktu $O$ obliczymy, rozwiązując układ równań zbudowany z równań prostej $CD$ i osi symetrii trapezu $ABCD$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$, czyli $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ jest środkiem podstawy $CD$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 pkt**
Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej $AB$: $a_{AB} = \frac{1}{2}$ lub współrzędnych punktu $S = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$ – środka podstawy $AB$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........ 2 pkt**
Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu: $y = -2x + \frac{9}{2}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........ 3 pkt**
Wykorzystanie warunku równoległości lub prostopadłości do wyznaczenia równania prostej zawierającej podstawę $CD$: $y = \frac{1}{2}x + 2$ i zapisanie układu równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + \frac{9}{2} \end{cases}$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania ........ 4 pkt**
Rozwiązanie zadania do końca z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ........ 5 pkt**
Obliczenie współrzędnych punktu $O = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ – środka podstawy $CD$ trapezu $ABCD$.

**II sposób**

b) Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej $AB$: $a_{AB} = \frac{-4-1}{-2-8} = \frac{1}{2}$. Prosta $CD$ jest równoległa do $AB$ i przechodzi przez punkt $C$, więc $y = \frac{1}{2}x + b$, $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$, stąd $b = 2$. Prosta $CD$ jest więc dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Następnie wyznaczamy współrzędne punktu $D$. Należy on do prostej $CD$, więc jego współrzędne można zapisać w postaci $D=\left(d, \frac{1}{2}d+2\right)$. Trapez $ABCD$ jest równoramienny, zatem zapisujemy równanie: $|AD|=|BC|$.

$\sqrt{(d+2)^2+\left(\frac{1}{2}d+2+4\right)^2}=\sqrt{(4-8)^2+(4-1)^2}$

Obie strony równania są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu:

$(d+2)^2+\left(\frac{1}{2}d+2+4\right)^2=25$

Stąd po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$\frac{5}{4}d^2+10d+15=0 \ |\cdot\frac{4}{5}$

$d^2+8d+12=0$

$\Delta=16,\ d_1=-6,\ d_2=-2$

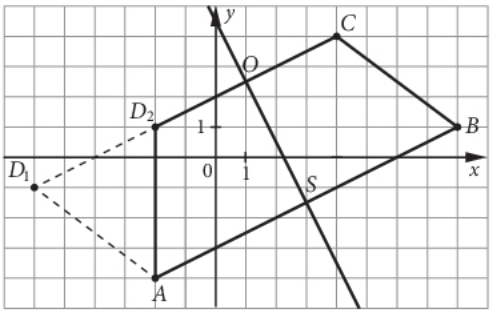
Zatem są dwa takie punkty: $D_1=(-6,-1)$ oraz $D_2=(-2,1)$.

Zauważmy (np. na podstawie rysunku), że $D_1$ nie spełnia warunków zadania, gdyż $ABCD_1$ jest równoległobokiem.

Ze wzoru na środek odcinka wyznaczamy:

$S=\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)=\left(3,-\frac{3}{2}\right)$ – środek podstawy $AB$

oraz $O=\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right)=\left(1,\frac{5}{2}\right)$ – środek podstawy $CD_2$.




a) Wyznaczamy równanie prostej $OS$ – osi symetrii trapezu $ABCD_2$:

$a_{OS}=\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{1-3}=-2,\ \frac{5}{2}=-2+b,$ więc $b=\frac{9}{2}$, czyli równanie prostej $OS$:

$y=-2x+\frac{9}{2}$ – oś symetrii trapezu.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **1 pkt**

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej $AB$: $a_{AB}=\frac{1}{2}$ i wyznaczenie równania prostej $CD$: $y=\frac{1}{2}x+2$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **2 pkt**

Wykorzystanie własności $|AD|=|BC|$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. w postaci $\sqrt{(d+2)^2+\left(\frac{1}{2}d+2+4\right)^2}=5$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **3 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów $D_1=(-6,-1)$ oraz $D_2=(-2,1)$ spełniających warunek $|AD|=|BC|$ i odrzucenie rozwiązania $D_1$.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania** ........ **4 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktu $O=\left(1,\frac{5}{2}\right)$ – środka podstawy $CD_2$ trapezu $ABCD_2$ i poprzestanie na tym lub rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

**Rozwiązanie pełne** ............................................................................................................ **5 pkt**

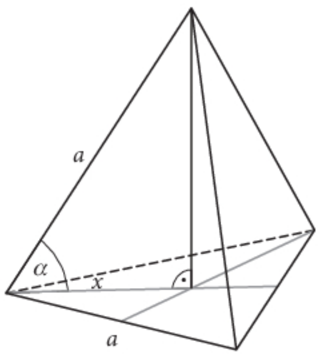
Wyznaczenie równania osi symetrii trapezu: $y = -2x + \frac{9}{2}$.

**Zadanie 33. (0–4)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9.2. Stereometria.<br>Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami).<br>6. Trygonometria. Zdający:<br>4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$.<br>1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°. |

**Przykładowe rozwiązania**

**I sposób**




Korzystamy ze wzorów $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ oraz $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ i przekształcamy wyrażenie:
$\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$. Ponieważ $\cos\alpha = \frac{x}{a}$, więc obliczamy $x$:
$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zatem wartość wyrażenia
$\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ............................................................................................................ **1 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości:
$x = \frac{2}{3} h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ............................................................................ **2 pkt**

Przekształcenie wyrażenia $\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha$ do postaci $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

**Uwaga**

Jeśli zdający przekształci wyrażenie do postaci $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ i nie obliczy wartości $x$, to otrzymuje **1 punkt**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................... 3 pkt**

Wyznaczenie $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zastosowanie jedynki trygonometrycznej i zapisanie wyrażenia w postaci $1 - 2\cos^2\alpha$.

lub

Wyznaczenie $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, skorzystanie z jedynki trygonometrycznej i wyznaczenie $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$.

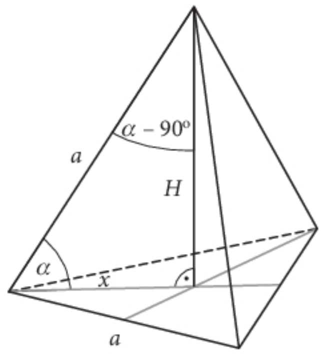
**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................... 4 pkt**

Obliczenie wartości wyrażenia $\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.

lub

Obliczenie wartości wyrażenia $\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.

**<u>II sposób</u>**




Wprowadzamy oznaczenia (np. jak na rysunku). Obliczamy $x$: $x = \frac{2}{3}h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz z twierdzenia Pitagorasa $H$: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2 = a^2$, stąd $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy: $\cos\alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos(90° - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Zatem wartość wyrażenia $\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................... 1 pkt**

Wyznaczenie długości odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości: $x = \frac{2}{3}h_{\text{podstawy}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................... 2 pkt**

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i obliczenie wysokości czworościanu: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................... 3 pkt**

Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych i wyznaczenie: $\cos\alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $\cos(90° - \alpha) = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................... 4 pkt**

Obliczenie wartości wyrażenia: $\cos^2(90° - \alpha) - \cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.