



**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ  
I SCHEMAT PUNKTOWANIA**

**MAJ 2014**

**Zadanie 1. (0–4)**

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{|x+3| + |x-3|}{x}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x \neq 0$ . Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej. Sporządzanie wykresu, odczytywanie własności i rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym związanych z proporcjonalnością odwrotną. (II.1.f, 4.m)

**Rozwiązanie**

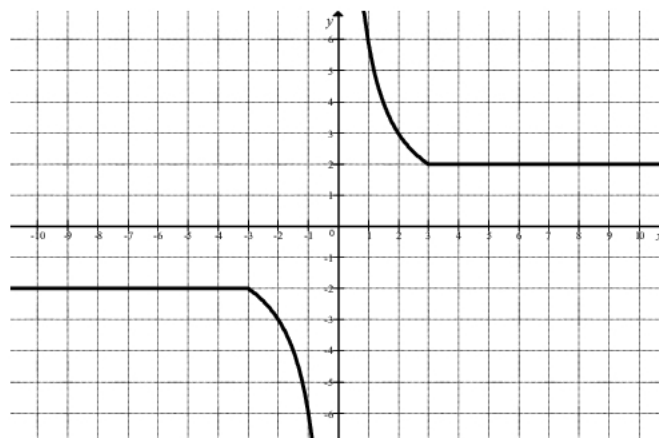
Wzór funkcji  $f$  możemy zapisać w każdym ze zbiorów:  $(-\infty, -3)$ ,  $\langle -3, 3 \rangle \setminus \{0\}$ ,  $\langle 3, +\infty)$  bez symbolu wartości bezwzględnej. Wówczas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x+3) + [-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{x+3 + [-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3), \\ \frac{x+3 + (x-3)}{x} & \text{dla } x \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$$

czyli

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{6}{x} & \text{dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3). \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$$

Wykres ma więc postać



Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest  $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający:

- zapisze przedziały:  $(-\infty, -3)$ ,  $\langle -3, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, +\infty)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej
- albo
- zaznaczy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -3)$ ,  $\langle -3, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, +\infty)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze licznik ułamka  $\frac{|x+3|+|x-3|}{x}$  w przedziałach  $(-\infty, -3)$ ,  $\langle -3, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, +\infty)$

bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.:

$$|x+3|+|x-3| = -(x+3) + [-(x-3)] \text{ dla } x \in (-\infty, -3),$$

$$|x+3|+|x-3| = x+3 + [-(x-3)] \text{ dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3),$$

$$|x+3|+|x-3| = x+3 + x-3 \text{ dla } x \in \langle 3, +\infty).$$

#### Uwaga

Nie wymagamy, żeby zdający rozpatrując funkcję  $f$  w przedziale  $\langle -3, 3 \rangle$  zapisał warunek  $x \neq 0$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający

- zapisze wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach popełniając błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu poda jej zbiór wartości
- albo
- poprawnie narysuje wykres funkcji  $f$  i błędnie odczyta zbiór wartości (np.  $R$ ).

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający poda zbiór wartości funkcji  $f$ :  $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$ .

#### **Uwaga**

Jeżeli zdający narysuje poprawnie wykres funkcji i nie poda zbioru jej wartości, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 2. (0–6)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 - (2m+2)x + 2m+5$  ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$  takie, że suma kwadratów odległości punktów  $A = (x_1, 0)$  i  $B = (x_2, 0)$  od prostej o równaniu  $x + y + 1 = 0$  jest równa 6.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań (również umieszczonych w kontekście praktycznym), prowadzących do badania funkcji kwadratowej. Obliczanie odległości punktu od prostej. (IV.4.1, 8.c)

**I sposób rozwiązania**

Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek  $\Delta > 0$ . Zatem

$$\begin{aligned} [-(2m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+5) &> 0, \\ 4m^2 - 16 &> 0, \\ 4(m-2)(m+2) &> 0, \\ m &\in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

Odległość punktu  $A = (x_1, 0)$  od prostej o równaniu  $x + y + 1 = 0$  jest równa

$$d_1 = \frac{|1 \cdot x_1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie odległość punktu  $B = (x_2, 0)$  od tej prostej jest równa  $d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}$ .

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6.$$

Przekształcając równoważnie tę równość otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{(x_1 + 1)^2}{2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{2} &= 6, \\ x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 &= 12, \\ x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) - 10 &= 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory Viete'a otrzymujemy równanie z niewiadomą  $m$

$$\begin{aligned} (2m+2)^2 - 2(2m+5) + 2(2m+2) - 10 &= 0, \\ 4m^2 + 8m + 4 - 4m - 10 + 4m + 4 - 10 &= 0, \\ 4m^2 + 8m - 12 &= 0, \\ m^2 + 2m - 3 &= 0, \\ (m-1)(m+3) &= 0. \end{aligned}$$



Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla  $m = -3$  istnieją pierwiastki  $x_1, x_2$ .

### **II sposób rozwiązania**

Funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek  $\Delta > 0$ . Zatem

$$[-(2m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+5) > 0,$$

$$4m^2 - 16 > 0,$$

$$4(m-2)(m+2) > 0,$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Odległość punktu  $A = (x_1, 0)$  od prostej o równaniu  $x + y + 1 = 0$  jest równa

$$d_1 = \frac{|1 \cdot x_1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie odległość punktu  $B = (x_2, 0)$  od tej prostej jest równa  $d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}$ .

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6, \text{ czyli } \frac{(x_1 + 1)^2}{2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{2} = 6.$$

Pierwiastki  $x_1, x_2$  są równe:

$$x_1 = \frac{2m+2 - \sqrt{4m^2 - 16}}{2} = m+1 - \sqrt{m^2 - 4} \text{ oraz } x_2 = \frac{2m+2 + \sqrt{4m^2 - 16}}{2} = m+1 + \sqrt{m^2 - 4}.$$

Otrzymujemy więc równanie z niewiadomą  $m$

$$\frac{(m+1 - \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} + \frac{(m+1 + \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} = 6,$$

$$(m+2 - \sqrt{m^2 - 4})^2 + (m+2 + \sqrt{m^2 - 4})^2 = 12,$$

$$(m+2)^2 - 2(m+2)\sqrt{m^2 - 4} + m^2 - 4 + (m+2)^2 + 2(m+2)\sqrt{m^2 - 4} + m^2 - 4 = 12,$$

$$2(m+2)^2 + 2m^2 - 8 = 12,$$

$$(m^2 + 4m + 4) + m^2 - 10 = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0,$$

$$(m-1)(m+3) = 0.$$

Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla  $m = -3$  istnieją pierwiastki  $x_1, x_2$ .

### **Schemat oceniania I i II sposobu oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga** Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania  $d_1^2 + d_2^2 = 6$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie odległości punktu  $A$  lub  $B$  od prostej o równaniu  $x + y + 1 = 0$  w zależności od pierwszej współrzędnej punktu:

$$d_1 = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

**2 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie

- wyrażenia  $d_1^2 + d_2^2$  w postaci:  $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)}{2}$

albo

- równości  $d_1^2 + d_2^2 = 6$ , w postaci równoważnej, np.:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 10 = 0$$

albo

- równania z niewiadomą  $m$  w postaci:

$$\frac{(m + 1 - \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} + \frac{(m + 1 + \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} = 6.$$

**3 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą  $m$ , np.:  $(2m + 2)^2 - 2(2m + 5) + 2(2m + 2) - 10 = 0$  lub

$$2(m + 2)^2 + 2m^2 - 8 = 12.$$

**4 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie tego równania:  $m = 1$  lub  $m = -3$ .

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego:  $m = -3$ .

**Rozwiązanie pełne (trzeci etap).....6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i równania oraz podanie odpowiedzi:  $m = -3$ .

**Uwaga**

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etapy I i II rozwiązania albo poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu równania z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże równanie z etapu II.

**Zadanie 3. (0–1)**

Rozwiąż równanie  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych. (II.6.e.R)

**I sposób rozwiązania**

Równanie zapisujemy w postaci równoważnej

$$\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1.$$

Dzieląc obie strony równania przez 2 otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$  oraz  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ , więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ze wzoru na sinus różnicy dostajemy

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{3} - x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

czyli

$$x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi.$$

W przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  są tylko dwa rozwiązania tego równania:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

**Uwaga**

Równanie  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2}$  możemy również zapisać w postaci równoważnej

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2},$$

a następnie zastosować wzór na cosinus sumy. Wtedy otrzymujemy

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

więc

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

### Uwaga

Do równania elementarnego, np.  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$  możemy również dojść nieco inaczej.

Zauważmy, że  $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ , czyli  $\sqrt{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$ . Zatem równanie  $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x - \sin x = 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np.:  $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2}$  lub

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x - \sin x = 1.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej:  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$  lub  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający rozwiąże równanie w zbiorze  $R$ :

$$x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , to otrzymuje 3 punkty.

### II sposób rozwiązania

*Egzamin maturalny z matematyki*  
*Kryteria oceniania odpowiedzi – poziom rozszerzony*

Ponieważ prawa strona równania  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$  jest nieujemna, więc równanie ma rozwiązania tylko wtedy, gdy  $\cos x \geq 0$ . Wówczas podnosząc obie strony równania do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne

$$3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x.$$

Stąd i z „jedyńki trygonometrycznej” otrzymujemy

$$3(1 - \sin^2 x) = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x,$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 2 = 0,$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Podstawiając  $t = \sin x$  otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2t^2 + t - 1 = 0,$$

$$(t+1)(2t-1) = 0.$$

Stąd

$$t = -1 \text{ lub } t = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\sin x = -1 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem pierwszego z tych równań jest każda liczba  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą. Rozwiązaniem drugiego jest każda liczba  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

Ponieważ dla każdego  $k$  jest liczbą całkowitą mamy  $\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) < 0$ , więc

żadna z liczb  $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$  nie jest rozwiązaniem naszego równania. Spośród pozostałych

rozwiązań, w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  znajdują się tylko dwie takie liczby:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

### **Uwaga**

Zamiast przekształcać równanie  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$  w sposób równoważny do układu równania  $3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$  i nierówności  $\cos x \geq 0$  możemy wyznaczyć wszystkie liczby z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , spełniające równanie  $3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$ ,

a więc liczby  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{5}{6}\pi$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ , a następnie sprawdzić, które z nich spełniają

równanie  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ . Wówczas dla  $x = \frac{\pi}{6}$  lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, \text{ a prawa } 1 + \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ więc liczba } x = \frac{\pi}{6} \text{ jest rozwiązaniem}$$

równania  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ . Dla  $x = \frac{5}{6}\pi$  lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{5}{6}\pi = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}, \text{ a prawa } 1 + \sin \frac{5}{6}\pi = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ więc liczba } x = \frac{5}{6}\pi \text{ nie jest}$$

rozwiązaniem równania  $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ . Dla  $x = \frac{3}{2}\pi$  lewa strona równania

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{3}{2}\pi = \sqrt{3} \cdot 0 = 0, \text{ a prawa } 1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 - 1 = 0, \text{ więc liczba } x = \frac{3}{2}\pi \text{ jest}$$

rozwiązaniem równania.

W przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  znajdują się dwa rozwiązania:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze założenie  $\cos x \geq 0$ , a następnie zapisze równanie w postaci równoważnej, np.:  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze alternatywę równań:  $\sin x = -1$  lub  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

### Uwaga

Wystarczy, że zdający zapisze  $t = -1$  lub  $t = \frac{1}{2}$ , jeśli wykonał podstawienie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający rozwiąże równania  $\sin x = -1$ ,  $\sin x = \frac{1}{2}$  w zbiorze  $R$ :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań spośród  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ ,

i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , to otrzymuje 3 punkty.

### III sposób rozwiązania

Dopisując do równania  $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$  „jedynekę trygonometryczną” otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

z niewiadomymi  $\sin x$  i  $\cos x$ .

Rozwiązując ten układ dostajemy kolejno:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ (\sqrt{3} \cdot \cos x - 1)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ 4 \cos x \left( \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ \cos x = 0 \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymane równania elementarne mamy

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Stąd

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

W przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  znajdują się dwa rozwiązania:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze układ równań, w którym jedno z równań zawiera tylko jedną niewiadomą  $\cos x$  lub  $\sin x$ , np.:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ (\sqrt{3} \cdot \cos x - 1)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze alternatywę elementarnych równań trygonometrycznych wynikających z otrzymanego układu, np.:

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający rozwiąże otrzymane równania w zbiorze  $R$ :

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  lub  $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

**Rozwiązanie pełne**.....4 pkt

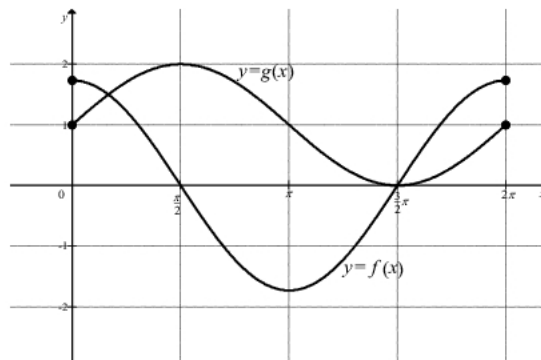
Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , to otrzymuje 3 punkty.

**IV sposób rozwiązania**

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = \sqrt{3} \cos x$  oraz  $g(x) = \sin x + 1$  określonych w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .



W przedziale  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  funkcja  $f$  jest malejąca, a jej wartości maleją od  $\sqrt{3}$  do 0, natomiast funkcja  $g$  jest w tym przedziale rosnąca, a jej wartości rosną od 1 do 2. Zatem równanie  $f(x) = g(x)$  ma w tym przedziale jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest  $x = \frac{\pi}{6}$ , gdyż  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$  oraz  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ . Drugim rozwiązaniem równania  $f(x) = g(x)$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  jest  $x = \frac{3}{2}\pi$ . Jest to wspólne miejsce zerowe funkcji  $f$  i  $g$ .

Zatem w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  znajdują się dwa rozwiązania równania:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania**.....1 pkt

Zdający rozważy dwie funkcje:  $f(x) = \sqrt{3} \cos x$  oraz  $g(x) = \sin x + 1$  i narysuje wykres jednej z nich.

**Uwaga**



Zdający może rozważać funkcje określone na dowolnym zbiorze zawierającym przedział  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający rozważy dwie funkcje:  $f(x) = \sqrt{3} \cos x$  oraz  $g(x) = \sin x + 1$  i narysuje w jednym układzie współrzędnych wykresu obu tych funkcji.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający poda rozwiązania równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ , ale nie sprawdzi,

$$\text{że } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$

i uzasadni, że są to wszystkie rozwiązania równania w tym przedziale, np. wykona

$$\text{sprawdzenie } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$$

**Uwaga**

Jeżeli zdający poda tylko jedno poprawne rozwiązanie równania z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$x = \frac{\pi}{6}$  albo  $x = \frac{3}{2}\pi$  i wykona odpowiednie sprawdzenie, **to otrzymuje 3 punkty.**

**Zadanie 4. (0–3)**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y$  prawdziwa jest nierówność

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2.$$

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu twierdzenia związanego z działaniami na wyrażeniach wymiernych: dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem wyrażen wymiernych, skracaniem, rozszerzaniem wyrażen wymiernych. (V.2.f)

**Rozwiązanie I sposób**

Przekształcając nierówność  $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$  w sposób równoważny otrzymujemy

$$(x+1)x^2 + (y+1)y^2 > 2xy,$$

$$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 > 0,$$

$$(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż  $(x - y)^2 \geq 0$  dla dowolnych liczb rzeczywistych, natomiast  $x^3 > 0$  i  $y^3 > 0$ , gdyż liczby  $x$  i  $y$  są dodatnie. To kończy dowód.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej:  $(x - y)^2 + x^3 + y^3 > 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 pkt**

gdy uzasadni prawdziwość nierówności  $(x - y)^2 + x^3 + y^3 > 0$ , np. stwierdzi, że  $(x - y)^2 \geq 0$  dla dowolnych liczb rzeczywistych oraz  $x^3 > 0$  i  $y^3 > 0$  dla liczb dodatnich  $x$  i  $y$ .

**Rozwiązanie II sposób**

Ponieważ  $x > 0$  i  $y > 0$ , więc  $x + 1 > 1$  i  $y + 1 > 1$ . Stąd wynika, że

$$(x + 1) \frac{x}{y} + (y + 1) \frac{y}{x} > 1 \cdot \frac{x}{y} + 1 \cdot \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Suma  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2, czyli

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ . W rezultacie  $(x + 1) \frac{x}{y} + (y + 1) \frac{y}{x} > 2$ , co kończy dowód.

**Uwaga**

Nierówność  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej

i geometrycznej:  $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$ . Stąd  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze, że  $(x + 1) \frac{x}{y} + (y + 1) \frac{y}{x} > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 pkt**

gdy uzasadni prawdziwość nierówności  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , np. stwierdzi, że suma liczby dodatniej

i jej odwrotności jest zawsze co najmniej równa 2 lub wykorzysta nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną.

**Rozwiązanie III sposób**

Przekształcając nierówność  $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$  w sposób równoważny otrzymujemy

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} > 2,$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2.$$

Suma  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2,

natomiast suma  $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$  jest dodatnia, gdyż jest sumą dwóch dodatnich składników. Zatem

nierówność  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2$  jest prawdziwa. To kończy dowód.

Uwaga

Nierówność  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej

i geometrycznej:  $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$ . Stąd  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje..... 1 pkt**

gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej:  $\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} > 2$

i w dalszym rozumowaniu dąży do wykazania, że suma  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  jest nie mniejsza niż 2, ale popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje..... 3 pkt**

gdy uzasadni prawdziwość nierówności  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2$ , np. stwierdzi, że  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  jest

prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, co wynika z twierdzenia o sumie liczby dodatniej

i jej odwrotności oraz  $\frac{x^2}{y} > 0$  i  $\frac{y^2}{x} > 0$  dla liczb rzeczywistych dodatnich  $x$  i  $y$ .

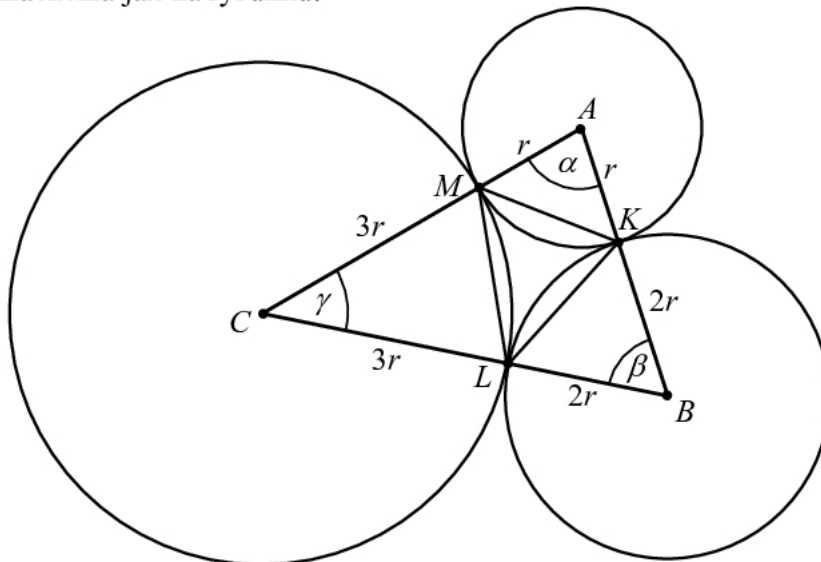
**Zadanie 5. (0–5)**

Dane są trzy okręgi o środkach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i promieniach równych odpowiednio  $r$ ,  $2r$ ,  $3r$ . Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie  $K$ , drugi z trzecim w punkcie  $L$  i trzeci z pierwszym w punkcie  $M$ . Oblicz stosunek pola trójkąta  $KLM$  do pola trójkąta  $ABC$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym. (III.7.c)

**I sposób rozwiązania**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta  $AMK$  jest równe

$$P_{AMK} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AK| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha,$$

pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 3r \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 12r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Zatem

$$\frac{P_{AMK}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot 12r^2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{12}.$$

Podobnie, pole trójkąta  $BKL$  jest równe

$$P_{BKL} = \frac{1}{2} |BK| \cdot |BL| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (2r)^2 \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \sin \beta,$$

natomiast pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |BA| \cdot |BC| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 5r \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 15r^2 \cdot \sin \beta,$$

więc

$$\frac{P_{BKL}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} \cdot 15r^2 \cdot \sin \beta} = \frac{4}{15}.$$

Pole trójkąta  $CLM$  jest równe

$$P_{CLM} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |CL| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} (3r)^2 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \sin \gamma,$$

natomiast pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |CA| \cdot |CB| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 5r \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 20r^2 \cdot \sin \gamma,$$

Zatem

$$\frac{P_{CLM}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2} \cdot 20r^2 \cdot \sin \gamma} = \frac{9}{20}.$$

Pole trójkąta  $KLM$  jest więc równe

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM} = P_{ABC} - \frac{1}{12} P_{ABC} - \frac{4}{15} P_{ABC} - \frac{9}{20} P_{ABC} = \frac{1}{5} P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający wyrazi pole trójkąta  $KLM$  jako różnicę pól odpowiednich trójkątów:

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający wyrazi pole co najmniej jednego z trójkątów  $AMK$ ,  $BKL$  lub  $CLM$  w zależności od  $r$  i sinusa odpowiedniego kąta trójkąta  $ABC$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczy pole co najmniej jednego z trójkątów  $AMK$ ,  $BKL$  lub  $CLM$  w zależności od

pola trójkąta  $ABC$ , np.:  $P_{AMK} = \frac{1}{12} P_{ABC}$ ,  $P_{BKL} = \frac{4}{15} P_{ABC}$ ,  $P_{CLM} = \frac{9}{20} P_{ABC}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 pkt

Zdający

- wyznaczy pole każdego z trójkątów  $AMK$ ,  $BKL$  lub  $CLM$  w zależności od pola trójkąta

$$ABC, \text{ np.: } P_{AMK} = \frac{1}{12} P_{ABC}, P_{BKL} = \frac{4}{15} P_{ABC}, P_{CLM} = \frac{9}{20} P_{ABC} \text{ i na tym poprzestanie}$$

albo

- obliczy stosunek pola trójkąta  $KLM$  do pola trójkąta  $ABC$ , popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

**Rozwiązanie pełne.....5 pkt**

Zdający obliczy stosunek pola trójkąta  $KLM$  do pola trójkąta  $ABC$ :  $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$ .

**II sposób rozwiązania**

Długości boków trójkąta  $ABC$  są równe  $|AB| = 3r$ ,  $|AC| = 4r$  i  $|BC| = 5r$ . Ponieważ

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (3r)^2 + (4r)^2 = 9r^2 + 16r^2 = 25r^2 = (5r)^2 = |BC|^2,$$

więc trójkąt  $ABC$  jest prostokątny. Zatem

$$\sin \beta = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}, \quad \sin \gamma = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5} \quad \text{oraz} \quad P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = 6r^2.$$

Pole trójkąta prostokątnego  $AMK$  jest równe

$$P_{AMK} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AK| = \frac{1}{2} r^2.$$

Pole trójkąta  $BKL$  jest równe

$$P_{BKL} = \frac{1}{2} |BK| \cdot |BL| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (2r)^2 \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} r^2,$$

a pole trójkąta  $CLM$  jest równe

$$P_{CLM} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |CL| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} (3r)^2 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{10} r^2.$$

Pole trójkąta  $KLM$  jest więc równe

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM} = 6r^2 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{8}{5} r^2 - \frac{27}{10} r^2 = \frac{1}{5} P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt**

Zdający

- zapisze, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny

albo

- wyrazi pole trójkąta  $KLM$  jako różnicę pól odpowiednich trójkątów:

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zdający

- obliczy sinusy kątów ostrych trójkąta  $ABC$ :  $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \gamma = \frac{3}{5}$

albo

- wyznaczy pole trójkąta  $ABC$  w zależności od  $r$ :  $P_{ABC} = 6r^2$

albo

- wyznaczy pole trójkąta  $AMK$  w zależności od  $r$ :  $P_{AMK} = \frac{1}{2} r^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający wyznaczy pole trójkąta  $ABC$  i pole jednego z trójkątów  $AMK$ ,  $BKL$ ,  $CLM$

w zależności od  $r$ :  $P_{ABC} = 6r^2$ ,  $P_{AMK} = \frac{1}{2}r^2$ ,  $P_{BKL} = \frac{8}{5}r^2$ ,  $P_{CLM} = \frac{27}{10}r^2$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**

Zdający

- wyznaczy pole każdego z trójkątów  $ABC$ ,  $AMK$ ,  $BKL$  lub  $CLM$  w zależności od  $r$  i na tym poprzestanie

albo

- obliczy stosunek pola trójkąta  $KLM$  do pola trójkąta  $ABC$ , popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Zdający obliczy stosunek pola trójkąta  $KLM$  do pola trójkąta  $ABC$ :  $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$ .

**III sposób rozwiązania**

Niech

$$|AB| = 3r, |BC| = 5r, |CA| = 4r$$

$$|AK| = |AM| = r, |BK| = |BL| = 2r, |CL| = |CM| = 3r$$

Zauważamy, że  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ , ponieważ  $(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$ , zatem

$$|KM| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

$$\cos|\sphericalangle CBA| = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}, \quad \cos|\sphericalangle ACB| = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$$

Zatem z twierdzenia kosinusów mamy

$$|KL| = \sqrt{4r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}r$$

$$|LM| = \sqrt{9r^2 + 9r^2 - 2 \cdot 3r \cdot 3r \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}r$$

Obliczamy  $\cos \sphericalangle KLM$ :

$$\begin{aligned} 2r^2 &= |KM|^2 = |ML|^2 + |KL|^2 - 2 \cdot |ML| \cdot |KL| \cdot \cos|\sphericalangle KLM| = \\ &= \frac{18r^2}{5} + \frac{16r^2}{5} - \frac{24\sqrt{50}}{25}r^2 \cdot \cos|\sphericalangle KLM| = \frac{34}{5}r^2 - \frac{24\sqrt{2}}{5}r^2 \cdot \cos|\sphericalangle KLM|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\cos|\sphericalangle KLM| = \frac{\frac{34}{5} - 2}{24 \frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } \sin|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wobec tego

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot r \cdot \frac{3\sqrt{10}}{5} r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6r^2}{5}.$$

Ponieważ

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = 6r^2,$$

więc otrzymujemy  $\frac{P_{\Delta KLM}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{5}$ .

### **Uwaga**

Można obliczyć miarę kąta  $KLM$

$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ABC|) - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ACB|) = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB|) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający wyznaczy jeden z boków trójkąta  $KLM$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający wyznaczy trzy boki trójkąta  $KLM$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczy kosinus jednego z kątów trójkąta  $KLM$ , np.  $\cos|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 pkt

Zdający wyznaczy sinus jednego z kątów trójkąta  $KLM$ , np.  $\sin|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pól trójkątów  $KLM$  i  $ABC$ :  $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$ .



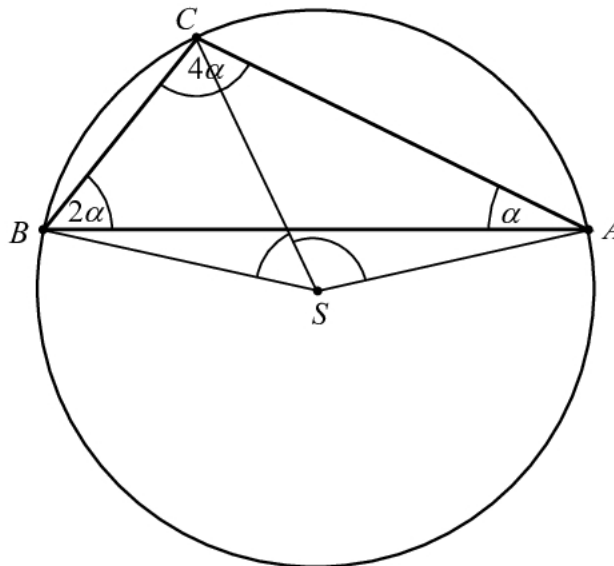
**Zadanie 6. (0–3)**

Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg o środku  $S$ . Kąty wewnętrzne  $CAB$ ,  $ABC$  i  $BCA$  tego trójkąta są równe odpowiednio  $\alpha$ ,  $2\alpha$  i  $4\alpha$ . Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych  $ASB$ ,  $ASC$  i  $BSC$  tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Korzystanie ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (V.5.b, 7.a)

**Rozwiązanie**

Suma kątów trójkąta jest równa  $180^\circ$ . Zatem  $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$ , więc  $7\alpha = 180^\circ$ . Stąd  $\alpha = (25\frac{5}{7})^\circ$  oraz  $4\alpha = (102\frac{6}{7})^\circ > 90^\circ$ . To oznacza, że trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny.



Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym wynika, że

$$|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC| = 2\alpha \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha.$$

Ponadto, wypukły kąt środkowy  $ASB$  ma miarę równą

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| + |\sphericalangle ASC| = 6\alpha.$$

Ciąg  $(6\alpha, 4\alpha, 2\alpha)$  jest arytmetyczny, a jego różnica jest równa  $(-2\alpha)$ . To kończy dowód.

**Schemat oceniania**

Zdający otrzymuje..... 1 pkt

gdy obliczy miarę kąta  $CAB$ :  $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ = (25\frac{5}{7})^\circ$  i uzasadni, że trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny.

**Uwaga**

Zdający nie musi obliczać miary kąta  $CAB$ . Wystarczy, że zapisze

$$4\alpha = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ > \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy rozważy poprawnie wpisany w okrąg trójkąt  $ABC$  i wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym do wyznaczenia miary kątów środkowych  $ASC$  i  $BSC$  w zależności od  $\alpha$ :  $|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$  oraz  $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 pkt**

gdy wyznaczy miary wypukłych kątów środkowych  $ASB$ ,  $ASC$  i  $BSC$  i stwierdzi, że tworzą one w podanej kolejności ciąg arytmetyczny:  $|\sphericalangle ASB| = 6\alpha$ ,  $|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$ ,  $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie uzasadni, że trójkąt  $ABC$  jest rozwartokątny, a udowodni, że miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 7. (0–6)**

Ciąg geometryczny  $(a_n)$  ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz  $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$ . Oblicz  $a_1$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Stosowanie wzorów na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. (II.5.b, c)

**Rozwiązanie**

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)$  są dodatnie i suma wszystkich jego wyrazów o numerach nieparzystych jest 100 razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych, więc ciąg ten nie jest stały.

Zauważmy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych również jest geometryczny, a jego iloraz jest równy  $q^2$ , gdzie  $q$  oznacza iloraz ciągu  $(a_n)$ . Tak samo ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu  $(a_n)$  o numerach parzystych jest geometryczny i jego iloraz również jest równy  $q^2$ . Każdy z tych ciągów ma po 50 wyrazów. Ze wzoru na sumę  $n$ -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$a_1 \cdot \frac{1 - (q^2)^{50}}{1 - q^2} = 100a_2 \cdot \frac{1 - (q^2)^{50}}{1 - q^2}.$$

Stąd mamy  $a_1 = 100a_2$ , czyli  $a_1 = 100a_1q$ . Zatem  $q = \frac{1}{100}$ , gdyż  $a_1 > 0$ .

Ponieważ

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100,$$

więc z własności logarytmów otrzymujemy

$$\log(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100}) = 100.$$

Z definicji logarytmu otrzymujemy więc

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100} = 10^{100}.$$

Stąd i ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego dostajemy równanie z niewiadomą  $a_1$

$$a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1+2+3+\dots+99} = 10^{100}.$$

Ze wzoru na sumę  $n$ -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1+99}{2} \cdot 99} = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100},$$

Stąd

$$a_1 = \frac{10}{\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{99}{2}}} = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- zauważy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych jest geometryczny oraz ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu  $(a_n)$  o numerach parzystych jest geometryczny, a iloraz każdego z tych ciągów jest taki sam

albo

- zapisze równość  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100(a_1q + a_3q + a_5q + \dots + a_{99}q)$

albo

- wykorzysta wzór na sumę logarytmów i definicję logarytmu oraz zapisze równość  $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$  w postaci:  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100} = 10^{100}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomymi  $a_1$  i  $q$ :  $a_1 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} = 100a_2 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2}$

albo

- zapisze równość  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100q(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99})$

albo

- zapisze równość  $a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot \dots \cdot (a_1 \cdot q^{99}) = 10^{100}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....4 pkt**

Zdający zapisze równanie z niewiadomą  $a_1$ , np.:

- $a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100}$

albo

- zapisze zależności  $a_1^{100} q^{4950} = 10^{100}$  i  $q = \frac{1}{100}$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający obliczy iloraz ciągu geometrycznego:  $q = \frac{1}{100}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci  $a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne.....6 pkt**

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = 10^{100}$ .

### **Zadanie 8. (0–4)**

Punkty  $A, B, C, D, E, F$  są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym  $A = (0, 2\sqrt{3})$ ,  $B = (2, 0)$ , a  $C$  leży na osi  $Ox$ . Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek  $E$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań dotyczących wzajemnego położenia prostej i okręgu. (IV.8.b.R)

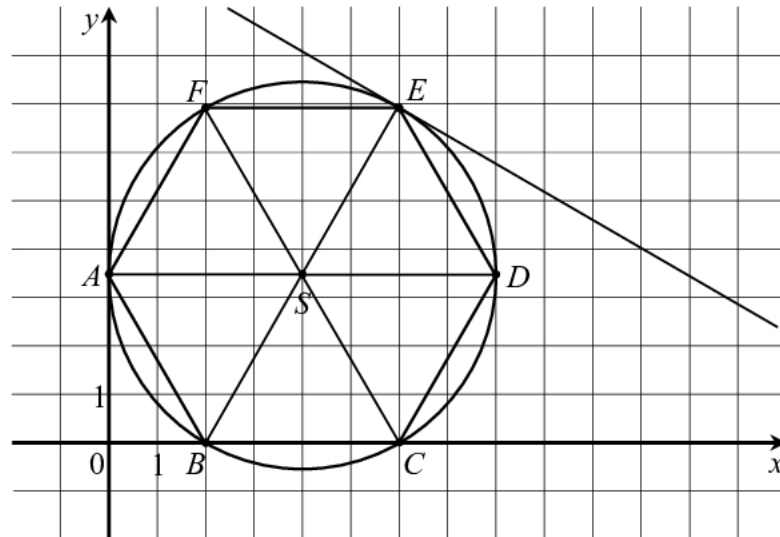
### Rozwiązanie

Obliczmy długość boku sześciokąta

$$|AB| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4.$$

Ponieważ wierzchołek  $C$  tego sześciokąta leży na osi  $Ox$ , więc  $C = (6, 0)$ .

Egzamin maturalny z matematyki  
Kryteria oceniania odpowiedzi – poziom rozszerzony



Środek  $S$  okręgu opisanego na tym sześciokącie ma zatem współrzędne  $S = (4, 2\sqrt{3})$ .

Punkt  $S$  jest środkiem przekątnej  $BE$  sześciokąta, więc

$$S = \left( \frac{x_B + x_E}{2}, \frac{y_B + y_E}{2} \right) = \left( \frac{2 + x_E}{2}, \frac{0 + y_E}{2} \right).$$

Zatem

$$\frac{2 + x_E}{2} = 4 \text{ i } \frac{y_E}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Stąd  $x_E = 6$  i  $y_E = 4\sqrt{3}$ , więc  $E = (6, 4\sqrt{3})$ .

Styczna do okręgu opisanego na sześciokącie foremnym  $ABCDEF$  poprowadzona przez wierzchołek  $E$  tego sześciokąta jest prostopadła do prostej  $BE$ . Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej  $BE$  jest równy

$$\frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{4\sqrt{3} - 0}{6 - 2} = \sqrt{3},$$

więc współczynnik kierunkowy stycznej jest równy  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Zatem styczna ma równanie

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 6) + 4\sqrt{3},$$

czyli

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- zapisze długość boku sześciokąta  $ABCDEF$ :  $|AB| = 4$

albo

- zapisze współrzędne środka  $S$  okręgu opisanego na sześciokącie:  $S = (4, 2\sqrt{3})$

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej  $BE$ :  $\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 pkt**

Zdający

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej  $BE$ :  $\sqrt{3}$  i obliczy lub poda współrzędne wierzchołka  $E$ :  $E = (6, 4\sqrt{3})$

albo

- zapisze, że prosta  $AC$  jest równoległa do stycznej

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej:  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Uwaga**

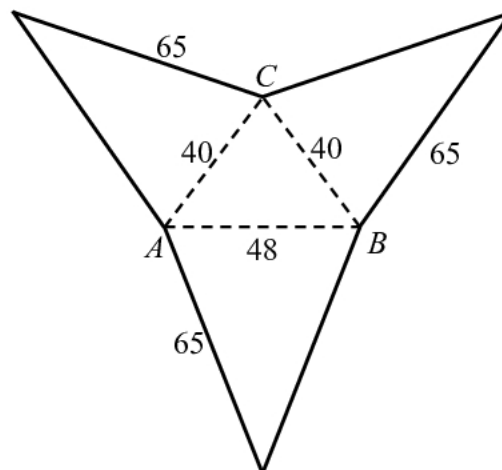
Jeśli zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej, ale nie obliczy współrzędnych punktu  $E$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne..... 4 pkt**

Zdający zapisze równanie stycznej:  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}$  lub  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-6) + 4\sqrt{3}$ .

**Zadanie 9. (0–6)**

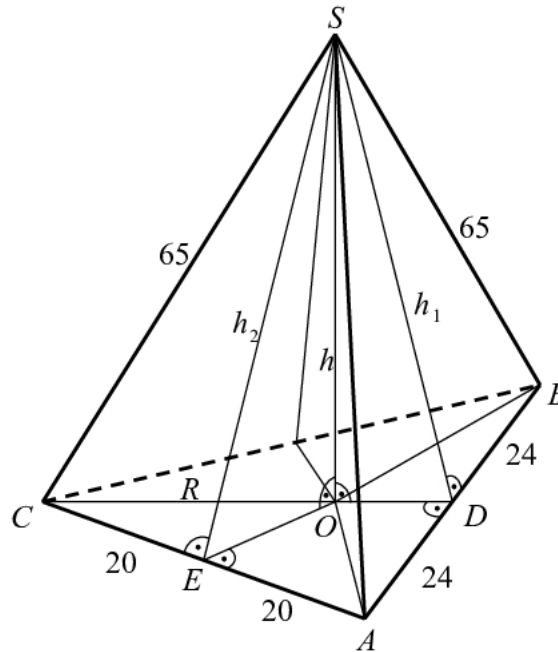
Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego  $ABCS$ , którego siatka została przedstawiona na rysunku.



Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii. (III.9.b)

**I sposób rozwiązania**

Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt  $ABC$ . Wówczas każda z krawędzi bocznych  $AS$ ,  $BS$  i  $CS$  ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają tę samą długość, więc spodek  $O$  wysokości  $SO$  ostrosłupa jest punktem przecięcia symetralnych boków jest podstawy, a więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Obliczmy promień  $R$  tego okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2, \text{ czyli } 24^2 + |DC|^2 = 40^2.$$

Stąd

$$|DC| = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32.$$

Trójkąty  $OEC$  i  $ADC$  są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $C$ ), więc

$$\frac{|OC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{R}{20} = \frac{40}{32}.$$

Stąd  $R = 25$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $COS$  otrzymujemy

$$|OC|^2 + |SO|^2 = |CS|^2, \text{ czyli } 25^2 + h^2 = 65^2.$$

Stąd

$$h = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60.$$

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

### Uwaga

Pole trójkąta  $ABC$  możemy obliczyć stosując wzór Herona

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16} = 8 \cdot 24 \cdot 4 = 768.$$

Promień  $R$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  możemy obliczyć wykorzystując wzór

$$P_{ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

Stąd

$$R = \frac{abc}{4P_{ABC}} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot 768} = 25.$$

### **Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta  $ABC$ ,

np.  $|DC| = 32$  albo obwód tego trójkąta.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający

- obliczy pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 768$

albo

- obliczy wysokość trójkąta  $ABC$  opuszczoną z wierzchołka  $C$  oraz zapisze, że spodek  $O$  wysokości  $SO$  ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

#### **Uwaga**

Wystarczy, że zdający oblicza promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający zapisze równanie pozwalające obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ ,

np.:  $768 = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot R}$  lub  $\frac{R}{20} = \frac{40}{32}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 pkt**

Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy:  $h = 60$

albo

- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo

- pominię we wzorze na objętość współczynnik  $\frac{1}{3}$  i otrzyma:  $V_{ABCS} = 46080$

albo

- pominię we wzorze na pole trójkąta współczynnik  $\frac{1}{2}$  i otrzyma:  $P_{ABC} = 1536$ ,

$$V_{ABCS} = 30720.$$

#### **Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ :  $R = 25$  oraz zapisze

równanie pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa, np.:  $25^2 + h^2 = 65^2$  i na tym

poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V_{ABCS} = 15360$ .

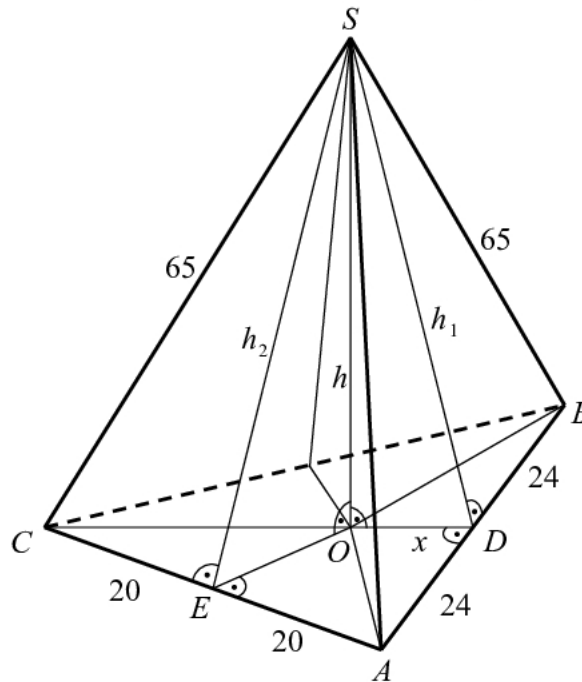


**Uwaga**

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik  $\frac{1}{3}$  i pominie współczynnik  $\frac{1}{2}$  we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe zadanie.

**II sposób rozwiązania**

Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt  $ABC$ . Wówczas każda z krawędzi bocznych  $AS$ ,  $BS$  i  $CS$  ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ krawędzie podstawy  $AC$  i  $BC$  mają równe długości i krawędzie boczne  $AS$  i  $BS$  mają równe długości, więc spodek  $O$  wysokości  $SO$  ostrosłupa leży na symetralnej  $CD$  odcinka  $AB$ . Odcinek  $CD$  jest również wysokością trójkąta  $ABC$  opuszczoną z wierzchołka  $C$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2, \text{ czyli } 24^2 + |DC|^2 = 40^2.$$

Stąd

$$|DC| = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADS$  otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DS|^2 = |AS|^2, \text{ czyli } 24^2 + h_1^2 = 65^2.$$

Stąd

$$h_1 = \sqrt{65^2 - 24^2} = \sqrt{3649}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $DOS$  i  $COS$  otrzymujemy

$$|DO|^2 + |SO|^2 = |SD|^2 \text{ oraz } |OC|^2 + |SO|^2 = |CS|^2,$$

czyli

$$x^2 + h^2 = 3649 \text{ oraz } (32 - x)^2 + h^2 = 65^2.$$

$$x^2 + h^2 = 3649 \text{ oraz } 32^2 - 64x + x^2 + h^2 = 65^2.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 32^2 - 64x + 3649 &= 65^2, \\ x &= 7, \end{aligned}$$

więc

$$h = \sqrt{3649 - 7^2} = 60.$$

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

### Uwaga

Możemy też przyjąć, że podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt  $ABS$  i wówczas wysokość ostrosłupa będzie odcinkiem  $CM$ , gdzie punkt  $M$  leży na wysokości  $SD$  tej podstawy. Tak jak w II sposobie rozwiązania obliczamy  $|CD| = 32$  oraz  $|SD| = \sqrt{3649}$ . Oznaczając  $|MD| = y$  oraz  $|CM| = h_3$ , a następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta  $MDC$  i trójkąta  $ASM$  otrzymujemy

$$|MD|^2 + |CM|^2 = |CD|^2 \quad \text{oraz} \quad |SM|^2 + |CM|^2 = |CS|^2,$$

czyli

$$\begin{aligned} y^2 + h_3^2 &= 32^2 \quad \text{oraz} \quad (\sqrt{3649} - y)^2 + h_3^2 = 65^2, \\ y^2 + h_3^2 &= 1024 \quad \text{oraz} \quad 3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + y^2 + h_3^2 = 4225, \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + 1024 &= 4225, \\ y &= \frac{224}{\sqrt{3649}}. \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } h_3 = \sqrt{1024 - y^2} = \sqrt{1024 - \left(\frac{224}{\sqrt{3649}}\right)^2} = \sqrt{1024 - \frac{50176}{3649}} = \frac{1920}{\sqrt{3649}}.$$

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |SD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \sqrt{3649} = 24\sqrt{3649}.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABS} \cdot h_3 = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3649} \cdot \frac{1920}{\sqrt{3649}} = 15360.$$

### Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta  $ABC$ ,

np.  $|DC| = 32$  albo obwód tego trójkąta.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**  
 Zdający

- obliczy pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 768$

albo

- obliczy wysokość trójkąta  $ABS$  opuszczoną z wierzchołka  $S$  oraz wysokość trójkąta  $ABC$  opuszczoną z wierzchołka  $C$ :  $|SD| = \sqrt{3649}$ ,  $|DC| = 32$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**  
 Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę  $ABC$  z wierzchołka  $S$ :  $x^2 + h^2 = 3649$  i  $(32 - x)^2 + h^2 = 65^2$

albo

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę  $ABS$  z wierzchołka  $C$ :  $x^2 + h_3^2 = 32^2$  i  $(\sqrt{3649} - x)^2 + h_3^2 = 65^2$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 5 pkt**  
 Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę  $ABC$  z wierzchołka  $S$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy:  $h = 60$

albo

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę  $ABS$  z wierzchołka  $C$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy:  $h_3 = \frac{1920}{\sqrt{3649}}$

albo

- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo

- pominie we wzorze na objętość współczynnik  $\frac{1}{3}$  i otrzyma:  $V_{ABCS} = 46080$

albo

- pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik  $\frac{1}{2}$  i otrzyma:  $P_{ABC} = 1536$ ,  
 $V_{ABCS} = 30720$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy długość odcinka  $OD$ :  $x = 7$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**. Podobnie jeśli zdający obliczy długość odcinka  $MD$ :

$y = \frac{224}{\sqrt{3649}}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**  
 Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V_{ABCS} = 15360$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik  $\frac{1}{3}$  i pominie współczynnik  $\frac{1}{2}$  we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 10. (0–5)**

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)[x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m] = 0$  ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. (III.2.c.R)

**I sposób rozwiązania**

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba  $-1$ , gdyż

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m.$$

Ponieważ  $\Delta = (-(2m + 1))^2 - 4(m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1$ , więc tymi

pierwiastkami są liczby  $x_1 = \frac{2m + 1 - 1}{2} = m$ ,  $x_2 = \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1$ .

Wyznamy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jeden z pierwiastków wielomianu  $W(x)$  jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Mamy więc

$$-1 = \frac{m + 1 + m}{2} \text{ lub } m = \frac{m + 1 + (-1)}{2} \text{ lub } m + 1 = \frac{m + (-1)}{2}.$$

Stąd  $m = -\frac{3}{2}$  lub  $m = 0$  lub  $m = -3$ . Ponieważ  $m$  jest liczbą całkowitą, więc istnieją dwie szukane wartości parametru  $m$ :  $m = 0$  lub  $m = -3$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 pkt**

Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest  $-1$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 pkt**

Zdający

- stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x)$ :  $-1$ ,  $m$ ,  $m+1$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**  
 Zdający

- zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru  $m$ :

$$-1 = \frac{m+1+m}{2} \text{ lub } m = \frac{m+1+(-1)}{2} \text{ lub } m+1 = \frac{m+(-1)}{2}$$

albo

- zapisze jedno z równań i konsekwentnie obliczy wartość parametru  $m$  (w przypadku równania  $-1 = \frac{m+1+m}{2}$  sformułuje wniosek, że nie istnieje taka całkowita wartość parametru  $m$ )

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi, konsekwentnie formułując końcowy wniosek.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**  
 Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru:  $m = -3$ ,  $m = 0$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru  $m$ :

$$-1 = \frac{m+1+m}{2} \text{ lub } m = \frac{m+1+(-1)}{2} \text{ lub } m+1 = \frac{m+(-1)}{2}, \text{ rozwiąże je i nie odrzuci } m = -\frac{3}{2},$$

to otrzymuje **4 punkty**.

### II sposób rozwiązania („wzory Viete’a”)

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba  $-1$ , gdyż

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m.$$

Ponieważ  $\Delta = (-(2m+1))^2 - 4(m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1$ , więc ten trójmian ma dwa różne pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$ , spełniające zależności:

$$x_1 + x_2 = 2m + 1, \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + m.$$

Wyznamy teraz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jeden z pierwiastków wielomianu  $W(x)$  jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Zapisujemy więc równości

$$-1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ lub } x_1 = \frac{x_2 - 1}{2} \text{ lub } x_2 = \frac{x_1 - 1}{2}.$$

Uwzględniając wzory Viete’a, z pierwszego równania otrzymujemy  $m = -\frac{3}{2}$ . Ponieważ  $m$

jest liczba całkowitą, więc to rozwiązanie odrzucamy. Z drugiego równania wyznaczamy  $x_2 = 2x_1 + 1$ , a następnie ze wzoru Viete’a na sumę pierwiastków otrzymujemy  $x_2 = \frac{2}{3}m$ .

Po podstawieniu tej zależności do wzoru Viete’a na iloczyn pierwiastków otrzymujemy równanie:

$$\left(2 \cdot \frac{2}{3}m + 1\right) \cdot \frac{2}{3}m = m^2 + m.$$

Po przekształceniach to równanie przyjmuje postać:  $m^2 + 3m = 0$ . Równanie to ma dwa rozwiązania:  $-3$  oraz  $0$ , stanowiące szukane całkowite wartości parametru.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest  $-1$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający zapisze równanie  $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$  i co najmniej jedno z równań  $\frac{x_1 - 1}{2} = x_2$ ,  $\frac{x_2 - 1}{2} = x_1$

oraz oba równania wynikające z wzorów Viete'a:

$$x_1 + x_2 = 2m + 1 \text{ i } x_1 \cdot x_2 = m^2 + m.$$

### **Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze jedynie równanie  $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$ , rozwiąże je, otrzymując  $m = -\frac{3}{2}$ ,

i odrzuci ten wynik, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 pkt

Zdający doprowadzi układ równań, np.

$$\begin{cases} \frac{x_1 - 1}{2} = x_2 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m \end{cases}$$

do równania kwadratowego z niewiadomą  $m$ , np.  $\frac{2}{3}m \left(\frac{4}{3}m + 1\right) = m^2 + m$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru:  $m = -3$ ,  $m = 0$ .

**Zadanie 11. (0–4)**

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa i stosowanie twierdzenia znanego jako <i>klasyczna definicja prawdopodobieństwa</i> do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (II.10.d)

**I sposób rozwiązania** (model klasyczny-kombinacje)

Zdarzeniami elementarnymi są trzejelementowe podzbiory  $\{a, b, c\}$  zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$ .

Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

Niech  $A$  oznacza zdarzenie - wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich zbiorów  $\{a, b, c\}$ , że  $a > b > c$  i  $a = b + c$ . Liczba  $a$  może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:

$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$ , więc są 4 takie podzbiory, gdzie  $a = 10$ ,

$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$ , więc są 4 takie podzbiory, gdzie  $a = 9$ ,

$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$ , więc są 3 takie podzbiory, gdzie  $a = 8$ ,

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$ , więc są 3 takie podzbiory, gdzie  $a = 7$ ,

$6 = 5 + 1 = 4 + 2$ , więc są 2 takie podzbiory, gdzie  $a = 6$ ,

$5 = 4 + 1 = 3 + 2$ , więc są 2 takie podzbiory, gdzie  $a = 5$ ,

$4 = 3 + 1$ , więc jest 1 taki podzbiór, gdzie  $a = 4$ ,

$3 = 2 + 1$ , więc jest 1 taki podzbiór, gdzie  $a = 3$ .

W rezultacie

$$|A| = 2(4 + 3 + 2 + 1) = 2 \cdot 10 = 20.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest więc równe

$$P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{10}{3}$

albo

- opíše zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , np. w postaci  $\{a, b, c\}$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$ .

**Uwaga**

Zdający może również zapisać  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**

Zdający

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci  $\{a, b, c\}$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$  oraz obliczy ich liczbę:  $|A| = 20$

albo

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{10}{3}$  i opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci  $\{a, b, c\}$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zdający zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = \binom{10}{3}$  oraz opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci  $\{a, b, c\}$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$  oraz obliczy ich liczbę:  $|A| = 20$ .

**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  pominie co najwyżej jeden przypadek i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  zapisze podzbiór, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np.  $\{10, 5, 5\}$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opíše zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe i otrzymany wynik jest z przedziału  $(0, 1)$ , to otrzymuje 3 punkty. Jeżeli natomiast otrzyma wynik  $P(A) > 1$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

**II sposób rozwiązania** (model klasyczny-wariacje)

Niech zdarzeniem elementarnym będzie trzywyrazowy ciąg  $(a, b, c)$ , którego wyrazami są liczby ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$  takie, że  $a \neq b$  i  $a \neq c$  i  $b \neq c$ . Mamy do czynienia z modelem klasycznym. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich ciągów  $(a, b, c)$ , że  $a > b > c$  i  $a = b + c$ , czyli ciągów malejących.

Liczba  $a$  może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:

$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$ , więc są 4 takie ciągi, gdzie  $a = 10$ ,

$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$ , więc są 4 takie ciągi, gdzie  $a = 9$ ,

$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$ , więc są 3 takie ciągi, gdzie  $a = 8$ ,



*Egzamin maturalny z matematyki*  
*Kryteria oceniania odpowiedzi – poziom rozszerzony*

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$ , więc są 3 takie ciągi, gdzie  $a = 7$ ,

$6 = 5 + 1 = 4 + 2$ , więc są 2 takie ciągi, gdzie  $a = 6$ ,

$5 = 4 + 1 = 3 + 2$ , więc są 2 takie ciągi, gdzie  $a = 5$ ,

$4 = 3 + 1$ , więc jest 1 taki ciąg, gdzie  $a = 4$ ,

$3 = 2 + 1$ , więc jest 1 taki ciąg, gdzie  $a = 3$ .

Z każdego takiego ciągu malejącego można utworzyć  $3! = 6$  zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ . W rezultacie

$$|A| = 3! \cdot 2(4 + 3 + 2 + 1) = 6 \cdot 20 = 120.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest więc równe

$$P(A) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$

albo

- opíše zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ , np. w postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$  oraz obliczy liczbę ciągów  $(a, b, c)$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$  (albo  $a < b < c$  i  $a + b = c$ ): 49

albo

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$  oraz obliczy liczbę ciągów  $(a, b, c)$  w jednej z tych sytuacji, np. w sytuacji, gdy  $a = b + c$

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$  i opíše zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia  $A$ , np. w postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

- Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$  oraz opíše zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia  $A$ , np. w postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a = b + c$  lub  $b = a + c$  lub  $c = a + b$  oraz obliczy ich liczbę:  $|A| = 6 \cdot 20$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$  (albo  $a < b < c$  i  $a + b = c$ ), pominie co najwyżej jedno i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci  $(a, b, c)$ , gdzie  $a > b > c$  i  $a = b + c$  (albo  $a < b < c$  i  $a + b = c$ ) zapisze ciąg, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np.  $(10, 5, 5)$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe, jednak otrzymany wynik jest z przedziału  $(0, 1)$ , to otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli natomiast otrzyma wynik  $P(A) > 1$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.
4. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia  $|\Omega|$  i  $|A|$ , to otrzymuje **0 punktów**.