Miejsce na identyfikację szkoły

# ARKUSZ PRÓBNEJ MATURY Z OPERONEM MATEMATYKA

## POZIOM ROZSZERZONY

LISTOPAD 2013

**Czas pracy: 180 minut**

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1.–12.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań rachunkowych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**.

***Życzymy powodzenia!***

Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

**PESEL ZDAJĄCEGO**

| | | |
|---|---|---|
| | | |

**KOD ZDAJĄCEGO**

## Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru $m$ równanie: $-x^2+\left(2m^2+3\right)x-m^4-1=0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Odpowiedź: ..............................................................................................................................

## Zadanie 2. (*5 pkt*)

Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\begin{cases}-2^{x+1}+2, & \text{dla } x\le 0\\ -|x-4|+4, & \text{dla } x>0\end{cases}$.

Określ liczbę rozwiązań równania $|f(x)|=m$ w zależności od parametru $m$.

Odpowiedź: ..............................................................................................................................

## Zadanie 3. (*4 pkt*)

O wielomianie $W(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ wiadomo, że liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym oraz że $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x+2$. Oblicz współczynniki $a$, $b$, $c$. Dla obliczonych wartości $a$, $b$, $c$ rozwiąż nierówność $W(x+1)<0$.

Odpowiedź: ..................................................................................................................................

## Zadanie 4. (*3 pkt*)

Liczby $a$, $b$, $k$ są całkowite i $k$ jest różna od zera. Wykaż, że jeśli liczby $a+b$ oraz $a \cdot b$ są podzielne przez $k$, to liczba $a^3 - b^3$ też jest podzielna przez $k$.

Odpowiedź: ..............................................................................................................................

## Zadanie 5. (*4 pkt*)

Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\sqrt{\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right)}$.

Odpowiedź: ....................................................................................................................................

## Zadanie 6. (*5 pkt*)

Wiedząc, że ciąg $(a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym oraz wyraz ogólny ciągu $(b_n)$ określony jest wzorem $b_n = 5^{a_n}$, wykaż, że ciąg $(b_n)$ jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz, w zależności od $n$, iloczyn $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n$, przyjmując, że pierwszy wyraz ciągu $(a_n)$ jest równy 1, a jego różnica jest równa 3.

Odpowiedź: ..........................................................................................................................

## Zadanie 7. (*5 pkt*)

Rozwiąż równanie: $\sin x\left|\cos x\right| = 0{,}25$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Odpowiedź: ..........................................................................................................................

## Zadanie 8. (*4 pkt*)

Okrąg o środku $A$ i promieniu długości $r$ jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku $B$ i promieniu długości $R\left(R>r\right)$. Prosta $k$ jest styczna jednocześnie do obu okręgów i tworzy z prostą $AB$ kąt ostry $\alpha$. Wyznacz $\sin\alpha$ w zależności od $r$ i $R$.

Odpowiedź: ..............................................................................................................................

## Zadanie 9. (*4 pkt*)

W trójkącie $ABC$ punkty $K=(2,2)$, $L=(-2,1)$, i $M=(-1,-1)$ są odpowiednio środkami boków $AB$, $BC$, $AC$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta $ABC$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Odpowiedź: ..........................................................................................................................

## Zadanie 10. (*4 pkt*)

W trójkącie $ABC$ kąt przy wierzchołku $B$ jest ostry, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 5 oraz $|AC| = 6$, $|AB| = 10$. Na boku $BC$ wybrano taki punkt $K$, że $|BK| = 2$. Oblicz długość odcinka $AK$.

Odpowiedź: ..............................................................................................................................

## Zadanie 11. (*4 pkt*)

W zielonym pudełku jest 10 monet pięciozłotowych i 5 monet dwuzłotowych, a w białym pudełku są 2 monety pięciozłotowe i 3 monety dwuzłotowe. Z zielonego pudełka losujemy jedną monetę i wrzucamy ją do białego pudełka. Następnie z białego pudełka losujemy jednocześnie 2 monety. Oblicz prawdopodobieństwo, że z białego pudełka wylosujemy w sumie 7 złotych.

Odpowiedź: ..................................................................................................................

## Zadanie 12. (*4 pkt*)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $a$. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Płaszczyzna tego przekroju tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze $\alpha$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: ..........................................................................................................................

**BRUDNOPIS** (*nie podlega ocenie*)