

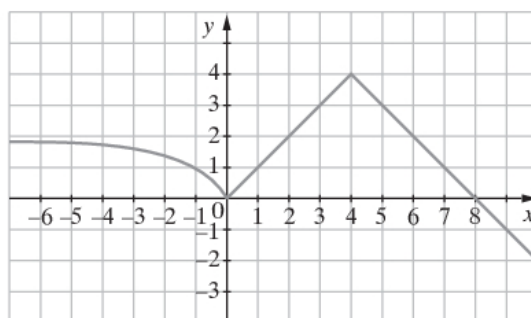
KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI  
Próbna Matura z OPERONEM

**Matematyka**  
**Poziom rozszerzony**

Listopad 2013

W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
1.	Postęp: zapisanie tylko warunków: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie warunków: $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie wzorów Viete'a i wyznaczenie: $\Delta = 12m^2 + 5$ , $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1$ , $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zauważenie, że wszystkie warunki $\Delta = 12m^2 + 5 > 0$ , $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1 > 0$ , $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3 > 0$ zachodzą dla $m \in \mathbb{R}$	4 pkt
2.	Istotny postęp: poprawne narysowanie każdej części wykresu, niekoniecznie uwzględniając dziedzinę	2 pkt (po 1 pkt za każdą część)
	Pokonanie zasadniczych trudności: sporządzenie całego wykresu funkcji $y = f(x)$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, 0)$ , 1 rozwiązanie dla $m \in (4, +\infty)$ , 2 rozwiązania dla $m \in \{0, 4\}$ , 3 rozwiązania dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$ , 4 rozwiązania dla $m \in (0, 2)$ .	5 pkt (4 pkt, jeśli popełniono jeden błąd)



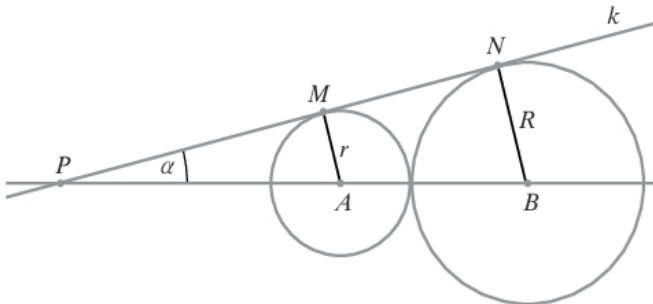
*Matematyka. Poziom rozszerzony*  
*Próbna Matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”*

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
3.	Postęp: zapisanie: $W(x) = 2(x-1)^2(x+2)$	1 pkt
	Istotny postęp: uporządkowanie postaci iloczynowej i porównanie: $2x^3 + ax^2 + bx + c = 2x^3 - 6x + 4$ wyznaczenie: $a = 0, b = -6, c = 4$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie wielomianu: $W(x+1) = 2x^3 + 6x^2$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie nierówności i zapisanie zbioru rozwiązań: $(-\infty, -3)$	4 pkt
4.	Postęp: zapisanie: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie drugiego czynnika: $a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)^2 - ab)$	2 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: stwierdzenie na podstawie założenia, że jeżeli liczby $(a+b)^2$ i $ab$ są podzielne przez $k$ , to ich różnica jest podzielna przez $k$ oraz $a-b$ jest liczbą całkowitą lub zapisanie: $a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)^2 - ab) = (a-b)(k^2p^2 - kq) = k(a-b)(kp^2 - q)$ , gdzie $p$ i $q$ są liczbami całkowitymi oraz $a-b$ i $kp^2 - q$ są liczbami całkowitymi	3 pkt
5.	Postęp: zapisanie warunków: $\begin{cases} (1) x+1 > 0 \\ (2) \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \\ (3) \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right) \geq 0 \end{cases}$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie jednego z warunków (2) lub (3) (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_{\frac{1}{3}}1 \Leftrightarrow 0 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ (3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \geq 1 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1 < x \leq -\frac{2}{3}$	3 pkt (2 pkt, jeśli rozwiązano jeden warunek)
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie układu wszystkich warunków $\begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 0 \\ -1 < x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$ i zapisanie: $D = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$	4 pkt

*Matematyka. Poziom rozszerzony*  
*Próbna Matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”*

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	Istotny postęp: zapisanie: $b_{n+1} = 5^{2n+1} = 5^{2n} \cdot 5 = 5^{2n} \cdot 5^1 = b_n \cdot 5^1$ , $n \in \mathbb{N}_+$ i $5^1$ – liczba	2 pkt (1 pkt, jeśli niewyjaśniono, że $5^1$ jest liczbą)
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 5^{2^1+2^2+\dots+2^n}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: zastosowanie wzorów na $n$ -tą sumę częściową	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 5^{\frac{3n^2-n}{2}}$	5 pkt
7.	Postęp: zapisanie alternatywy układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ -2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie wzoru na $\sin 2x$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ -\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie równań dla $x \in (0, 2\pi)$ : $\sin 2x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{12} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{13\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{17\pi}{12}$ $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{12} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{19\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{23\pi}{12}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: poprawne rozwiązanie każdego z układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ x \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \end{cases}$ $x \in \left[ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right] \text{ lub } x \in \left[ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right]$	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie rozwiązania $x \in \left[ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right]$	5 pkt

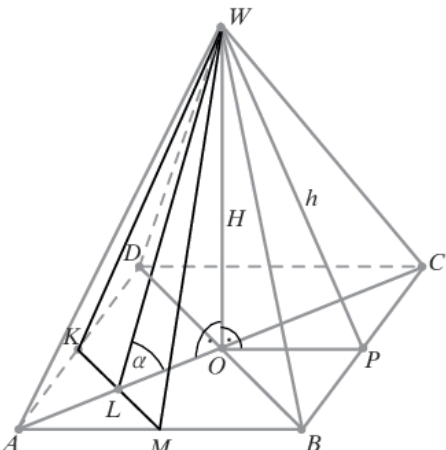
*Matematyka. Poziom rozszerzony*  
*Próbna Matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”*

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	<p>Postęp: wykonanie rysunku</p>  <p>lub opis oznaczeń:  <b>P</b> – punkt przecięcia prostej <b>k</b> z prostą <b>AB</b>  <b>M</b> – punkt styczności <math>o(A, r)</math> z prostą <b>k</b>  <b>N</b> – punkt styczności <math>o(B, R)</math> z prostą <b>k</b></p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp: zastosowanie twierdzenia Talesa:  <math>\frac{ BN }{ BP } = \frac{ AM }{ AP }, \frac{R}{R+r+a} = \frac{r}{a}</math>, gdzie <math> AP  = a</math></p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie <math> AP  = a = \frac{(R+r)r}{R-r}</math></p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie z trójkąta <b>AMP</b>: <math>\sin \alpha = \frac{r}{ AP } = \frac{R-r}{R+r}</math></p>	4 pkt
9.	<p>Postęp: oznaczenie wierzchołków trójkąta: <math>A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)</math> i wykorzystanie wzoru na współrzędne środka odcinka:  <math>K = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right), L = \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right)</math> i <math>M = \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)</math></p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp: zapisanie odpowiednich układów równań:  <math display="block">\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = -1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases}</math></p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie układów równań i zapisanie współrzędnych punktów: <math>A = (3, 0), B = (1, 4), C = (-5, -2)</math></p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie obrazów punktów <b>A, B, C</b> symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych <math>A' = (-3, 0), B' = (-1, -4), C' = (5, 2)</math></p>	4 pkt

*Matematyka. Poziom rozszerzony*  
*Próbna Matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”*

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
10.	Postęp: zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta $ABC$ i obliczenie $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{3}{5}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie $\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{4}{5}$ , $\sphericalangle ABC$ – kąt ostry	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta $ABK$ $ AK ^2 = 10^2 + 2^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie $ AK  = 6\sqrt{2}$	4 pkt
11.	Postęp: obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania z zielonego pudełka 5 zł                      oraz                      2 zł $P(B_1) = \frac{2}{3}$ $P(B_2) = \frac{1}{3}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie prawdopodobieństw przy losowaniu z białego pudełka $p_1 = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{5}$ $p_2 = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: narysowanie drzewka i podpisanie odpowiednich gałęzi	3 pkt
	Uwaga: Jeżeli uczeń od razu narysował drzewko odpowiadające opisanej w zadaniu sytuacji i poprawnie wpisał prawdopodobieństwa na potrzebnych gałęziach, to również otrzymuje 3 pkt.	
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} = \frac{26}{45}$	4 pkt

*Matematyka. Poziom rozszerzony*  
*Próbna Matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”*

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
12.	<p>Postęp:            sporządzenie poprawnego rysunku z oznaczeniami:  <math>OW</math> – wysokość bryły, <math>LW</math> – wysokość trójkąta powstałego w przekroju</p>  <p>lub opisanie oznaczeń bez rysunku i wyjaśnienie, że kąt <math>\alpha</math> jest wyznaczony przez wysokość przekroju i przekątną podstawy</p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp:            wyznaczenie długości odcinka <math>OL</math>: <math> OL  = \frac{a\sqrt{2}}{4}</math></p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności:            wyznaczenie z trójkąta <math>OLW</math> długości wysokości ostrosłupa:  <math>H =  OW  = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha</math></p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne:            wyznaczenie objętości ostrosłupa: <math>V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \operatorname{tg} \alpha</math></p>	4 pkt