Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2013

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2013

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.) Wersja arkusza A	Poprawna odpowiedź (1 p.) Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\lvert x-a\rvert < b$ (II.1.f)	**A**	**D**

Zadanie 2. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie pojęcia procentu (III.1.d)	**B**	**C**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie obliczeń z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (I.1.h)	**B**	**C**

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie układu równań liniowych (I.3.c)	**C**	**A**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	**D**	**A**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie ze wzoru funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (II.4.b)	**D**	**C**

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (I.2.a)	**C**	**B**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	**D**	**A**

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współczynników we wzorze funkcji liniowej do określenia położenia prostej w układzie współrzędnych (II.4.g)	**A**	**C**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie nierówności liniowej i wskazanie najmniejszej liczby spełniającej tę nierówność (I.3)	**B**	**C**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie wykresu funkcji $y=f\left(x\right)$ do wskazania wykresu funkcji typu $y=f\left(x+a\right)$, $y=f\left(x-a\right)$, $y=-f\left(x\right)$, $y=f\left(-x\right)$ (I.4.d)	**C**	**A**

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (II.5.c)	**C**	**B**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (II.5.c)	**B**	**C**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)	**A**	**D**

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (I.7.a)	**A**	**D**

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego (I.3.d)	**C**	**B**

Zadanie 17. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie i obwodu rombu (II.8.e)	**D**	**B**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka do wyznaczenia jednego z końców tego odcinka (II.8.f)	**C**	**D**

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (II.8.g)	**A**	**C**

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanie (I.9.b)	**B**	**C**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych (II.9.b)	**C**	**B**

Zadanie 22. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.d)	**B**	**C**

Zadanie 23. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, w tym obliczeń na pierwiastkach (I.1.a)	**B**	**C**

Zadanie 24. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie mediany uporządkowanego zestawu danych (II.10.a)	**D**	**A**

Zadanie 25. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związków miarowych w graniastosłupie do obliczenia jego objętości (II.9.b)	**B**	**C**

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-8x-16=0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (II.3.d)

<u>I sposób rozwiązania</u> (metoda grupowania)
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x\left(x^2-8\right)+2\left(x^2-8\right)=0 \qquad \text{lub} \qquad x^2\left(x+2\right)-8\left(x+2\right)=0$$

$$\left(x+2\right)\left(x^2-8\right)=0.$$

Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$ lub $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $\left(x+2\right)\left(x^2-8\right)$, $\left(x+2\right)\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)$, przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-2$, $x=-\sqrt{8}$, $x=\sqrt{8}$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda dzielenia)
Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3+2x^2-8x-16$. Dzielimy wielomian $x^3+2x^2-8x-16$ przez dwumian $\left(x+2\right)$. Otrzymujemy iloraz $\left(x^2-8\right)$.
Zapisujemy równanie w postaci $\left(x+2\right)\left(x^2-8\right)=0$. Stąd $\left(x+2\right)\left(x+\sqrt{8}\right)\left(x-\sqrt{8}\right)=0$ i $x=-2$ lub $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$ lub $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy podzieli wielomian $x^3+2x^2-8x-16$ przez dwumian $\left(x+2\right)$, otrzyma iloraz $\left(x^2-8\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający **otrzymuje ....2 pkt**
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-2$, $x=-\sqrt{8}$, $x=\sqrt{8}$.

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (II.6.c)

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (wykorzystanie znanych wartości funkcji trygonometrycznych)

Ponieważ α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 60^\circ$. Zatem $\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Stąd $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze wartość cosinusa kąta α: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy, że $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u> (wykorzystanie związków między funkcjami trygonometrycznymi)

Obliczamy $\sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, następnie korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obliczamy $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, stąd $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

albo

korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, przekształcamy wyrażenie $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$ do postaci $4\sin^2\alpha - 3$, a następnie obliczamy jego wartość: $4\sin^2\alpha - 3 = 0$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- obliczy $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

albo

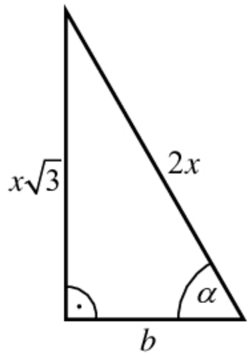
- zapisze wyrażenie w postaci $\sin^2\alpha - 3\left(1 - \sin^2\alpha\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy, że $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

III sposób rozwiązania (trójkąt prostokątny)



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $b^2 = (2x)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2$, więc $b = x$.

Stąd $\cos\alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, więc $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności), obliczy długość drugiej przyprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt, obliczy cosinus tego kąta i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości $\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej długości 2 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym, obliczy cosinus tego kąta $\cos\alpha$ (o ile otrzymana wartość jest dodatnia i mniejsza od 1) i konsekwentnie obliczy wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

Zadania 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *x*, *y*, *z* takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \le 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)

I sposób rozwiązania

Podnosimy obie strony równości $x + y + z = 0$ do kwadratu i otrzymujemy równość równoważną

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0.$$

Stąd

$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

Ponieważ suma kwadratów liczb x, y, z jest nieujemna, więc $-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le 0$, czyli $xy + yz + zx \le 0$, co kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy podniesie obie strony równości $x + y + z = 0$ do kwadratu i zapisze np.

$xy + xz + yz = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$ lub $2xy + 2xz + 2yz = -x^2 - y^2 - z^2$

i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$ lub $-x^2 - y^2 - z^2$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód.

II sposób rozwiązania

Z równości $x + y + z = 0$ wyznaczamy jedną z liczb, np. $z = -x - y$. Wtedy otrzymujemy

$$xy + xz + yz = xy + x(-x - y) + y(-x - y) = xy - x^2 - xy - xy - y^2 =$$
$$= -x^2 - xy - y^2 = -\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

Wyrażenie $x^2 + xy + y^2$ traktujemy jak trójmian kwadratowy zmiennej x. Wówczas jego wyróżnik jest równy $\Delta = y^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = -3y^2 \le 0$. To, wraz z dodatnim znakiem współczynnika przy x^2, oznacza, że trójmian przyjmuje jedynie wartości nieujemne, czyli $x^2 + xy + y^2 \ge 0$. Stąd $xy + xz + yz = -\left(x^2 + xy + y^2\right) \le 0$.

Możemy również zauważyć, że $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$. Jest to suma dwóch liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd $xy + xz + yz = -\left(x^2 + xy + y^2\right) \le 0$.

Możemy również zauważyć, że $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}y^2$. Jest to suma trzech liczb nieujemnych, a więc jest nieujemna. Stąd $xy + xz + yz = -\left(x^2 + xy + y^2\right) \le 0$.

To kończy dowód.

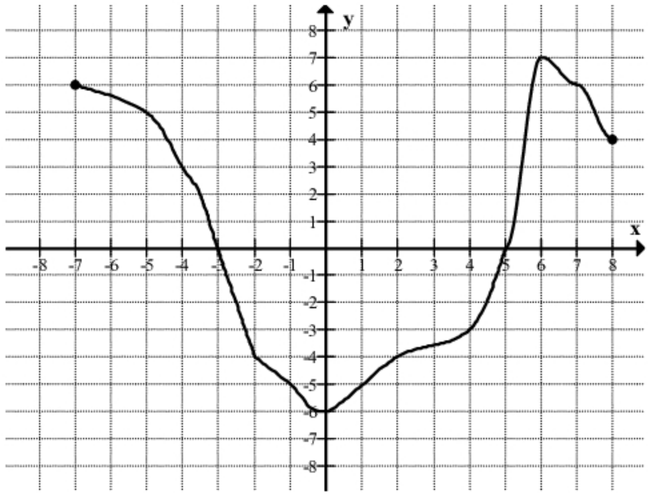
Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy wyznaczy z równości $x + y + z = 0$ jedną z liczb i zapisze wyrażenie $xy + xz + yz$ w zależności od dwóch zmiennych, np. zmiennych x i y: $xy + xz + yz = -x^2 - xy - y^2$ i na tym dowód zakończy nie uzasadniając znaku wyrażenia $-x^2 - xy - y^2$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadania 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) największą wartość funkcji *f*,
b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji zbioru jej wartości oraz przedziałów w których funkcja przyjmuje wartości ujemne (II.4.b)

Rozwiązanie
Odczytujemy z wykresu największą wartość funkcji *f* . Jest ona równa 7.
Podajemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: $(-3, 5)$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- poda największą wartość funkcji: 7 i nie poda zbioru tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne

albo

- poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: $(-3, 5)$ i nie poda największej wartości funkcji *f*.

  Uwaga
  Akceptujemy zapisy: $x \in (-3, 5)$ lub $-3 < x < 5$ lub $x > -3$ i $x < 5$ lub $x > -3$, $x < 5$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poda największą wartość funkcji oraz poda zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: 7, $(-3, 5)$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki
W rozwiązaniu podpunktu b) akceptujemy zapisy: $x \in (5, -3)$, $x \in (3, 5)$, $x \in (3, -5)$.

Zadania 30. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 7x + 5$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

  $\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$ i stąd $x_1 = \frac{7-3}{4} = 1$ oraz $x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

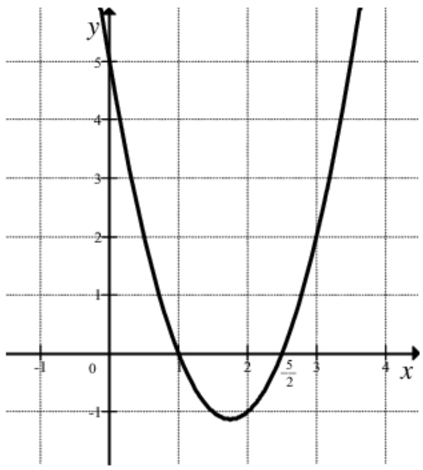
  $x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, stąd $x_1 = 1$ oraz $x_2 = \frac{5}{2}$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając je na wykresie

  $x_1 = 1$, $x_2 = 2\frac{1}{2}$ lub $2(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Drugi etap rozwiązania:



Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub ($x \leq 1$ lub $x \geq \frac{5}{2}$).

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $2\left(x - \frac{10}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność,
- zapisze nierówność $\left|x - \frac{7}{4}\right| \ge \frac{3}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
- błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x + \frac{7}{4}\right| \ge \frac{3}{4}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{2}, +\infty\right)$ lub ($x \le 1$ lub $x \ge \frac{5}{2}$),

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \le 1$, $x \ge \frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i zapisze, np. $x \in \left(-\infty, -1\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{5}, +\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 31. (0–2)

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2\cdot 6^{99} + 10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.g)

Rozwiązanie

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $6^{98}\cdot\left(6^2 - 2\cdot 6 + 10\right)$. Doprowadzamy do postaci $6^{98}\cdot 2\cdot 17$.

Schemat oceniania rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

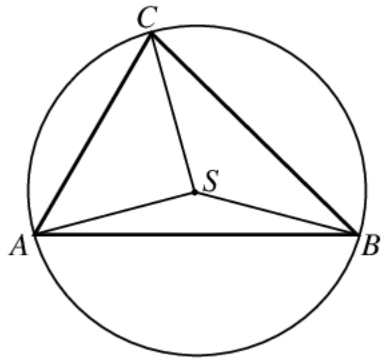
gdy zapisze liczbę $6^{100} - 2\cdot 6^{99} + 10\cdot 6^{98}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 6^k, gdzie $80 \le k \le 98$, np. $6^{98}\left(6^2 - 2\cdot 6 + 10\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy zapisze liczbę w postaci, w której widać podzielność przez 17 albo przeprowadzi rozumowanie uzasadniające podzielność przez 17.

Zadania 32. (0–4)

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.

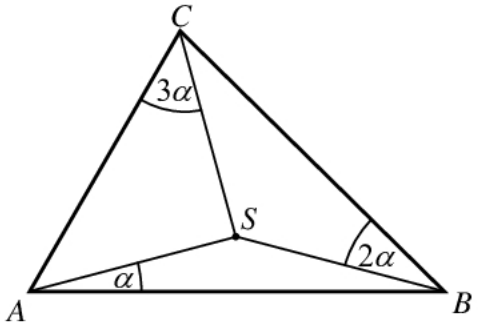


Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)

I sposób rozwiązania

Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta. Niech α oznacza miarę kąta BAS. Wówczas

$$|\sphericalangle CBS| = 2\alpha \text{ i } |\sphericalangle ACS| = 3\alpha .$$



Każdy z trójkątów ABS, BCS i CAS jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha ,\ |\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 2\alpha ,\ |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS| = 3\alpha .$$

Miary kątów trójkąta ABC są więc równe

$$|\sphericalangle BAC| = 4\alpha ,\ |\sphericalangle CBA| = 3\alpha ,\ |\sphericalangle ACB| = 5\alpha .$$

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°, zatem

$$4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ ,$$

$$12\alpha = 180^\circ ,$$

$$\alpha = 15^\circ .$$

Więc $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS, ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów ABS, BCS i CAS są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

- Zapisanie miar kątów BAS, ACS i CBS w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

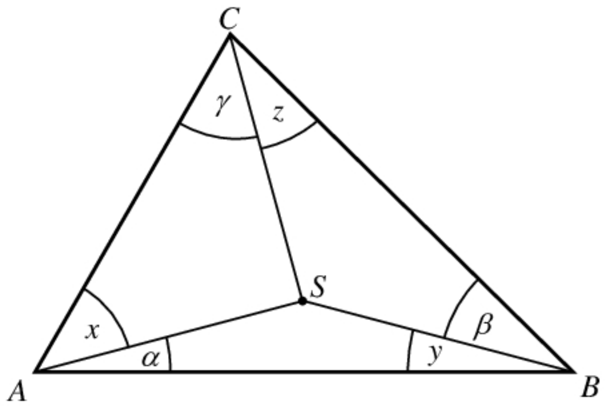
- wykorzystanie faktu, że co najmniej dwa spośród trójkątów ABS, BCS i CAS są równoramienne, np.: $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć miary kątów trójkąta *ABC*, np.: $4\alpha+3\alpha+5\alpha=180°$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Obliczenie miar kątów trójkąta *ABC*: $|\sphericalangle BAC|=60°$, $|\sphericalangle CBA|=45°$, $|\sphericalangle ACB|=75°$.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt *ABC* jest ostrokątny, więc środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz tego trójkąta.
Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym otrzymujemy

$$|\sphericalangle ASB|=2\gamma+2z,\ |\sphericalangle BSC|=2\alpha+2x,\ |\sphericalangle CSA|=2\beta+2y.$$

Suma kątów w każdym z trójkątów *ABS*, *BCS* i *CAS* jest równa $180°$, więc otrzymujemy układ równań

$$\alpha+y+(2\gamma+2z)=180° \text{ i } \beta+z+(2\alpha+2x)=180° \text{ i } \gamma+x+(2\beta+2y)=180°.$$

Ponieważ $\beta=2\alpha$ i $\gamma=3\alpha$, więc układ możemy zapisać w postaci

$$\alpha+y+(6\alpha+2z)=180° \text{ i } 2\alpha+z+(2\alpha+2x)=180° \text{ i } 3\alpha+x+(4\alpha+2y)=180°,$$

$$7\alpha+y+2z=180° \text{ i } 4\alpha+2x+z=180° \text{ i } 7\alpha+x+2y=180°.$$

Mnożąc strony pierwszego równania przez -2, drugiego przez 4 otrzymujemy

$$-14\alpha-2y-4z=-360° \text{ i } 16\alpha+8x+4z=720° \text{ i } 7\alpha+x+2y=180°.$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$9\alpha+9x=540°,$$

$$\alpha+x=60°,$$

czyli $|\sphericalangle ABC|=60°$. Zatem $|\sphericalangle BSC|=120°$.

Trójkąt *BSC* jest równoramienny, więc $|\sphericalangle SBC|=|\sphericalangle SCB|=\dfrac{180°-120°}{2}=30°$, zatem

$2\alpha=30°$, czyli $\alpha=15°$. Stąd $|\sphericalangle CBA|=45°$, $|\sphericalangle ACB|=75°$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

- Zapisanie miar kątów *BAS*, *ACS* i *CBS* w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

albo

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi *ASB*, *BSC* i *ASC* oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań, np.:
  $\alpha + y + (2\gamma + 2z) = 180°$ i $\beta + z + (2\alpha + 2x) = 180°$ i $\gamma + x + (2\beta + 2y) = 180°$,
  gdzie $x = |\sphericalangle CAS|$, $y = |\sphericalangle ABS|$, $z = |\sphericalangle BCS|$, $\beta = |\sphericalangle CBS|$, $\gamma = |\sphericalangle ACS|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

- Zapisanie miar kątów *BAS*, *ACS* i *CBS* w zależności od jednej zmiennej, np.: $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$ i $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

oraz

- wykorzystanie zależności między kątami środkowymi *ASB*, *BSC*, *ASC* oraz odpowiednimi kątami wpisanymi i zapisanie układu co najmniej trzech równań z czterema niewiadomymi, np.:
  $\alpha + y + (6\alpha + 2z) = 180°$ i $2\alpha + z + (4\alpha + 2y) = 180°$ i $3\alpha + x + (4\alpha + 2y) = 180°$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Obliczenie miary kąta *CAB*: $\alpha + x = 60°$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Obliczenie miar kątów trójkąta *ABC*: $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle CBA| = 45°$, $|\sphericalangle ACB| = 75°$.

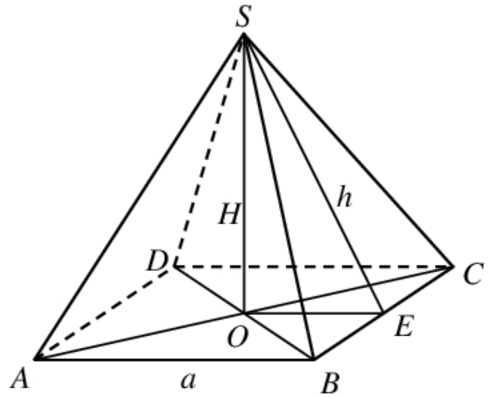
Zadanie 33. (0–4)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach. (IV.9.b)

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole podstawy ostrosłupa jest równe 100, więc $a^2 = 100$. Stąd $a = 10$.

Pole powierzchni bocznej jest równe 260, więc $4 \cdot \frac{1}{2} ah = 260$. Stąd i z poprzedniego wyniku

$$2 \cdot 10h = 260, \text{ więc } h = 13.$$

Ponieważ trójkąt EOS jest prostokątny, więc

$$\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = h^2,$$

$$5^2 + H^2 = 13^2,$$

$$H^2 = 144,$$

$$H = 12.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} P_p H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 400 cm^3.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = 12$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy wysokość ściany bocznej $h = 13$ i nie traktuje jej jako wysokości ostrosłupa i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**. Jeżeli natomiast przyjmuje, że obliczona wysokość ściany bocznej jest wysokością ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 400\,\text{cm}^3$.

Uwagi

1. Nie zwracamy uwagi na jednostki (zdający może je pominąć).
2. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem powierzchni całkowitej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem jednej ściany bocznej i konsekwentnie do tego błędu obliczy objętość ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 34. (0–5)

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)

Rozwiązanie

Niech v oznacza średnią prędkość (w $\mathrm{km/h}$) pierwszego pociągu na tej trasie, t - czas przejazdu (w godzinach) pierwszego pociągu na tej trasie. Wtedy $v-9$ oznacza średnią prędkość drugiego pociągu na tej trasie, $t+\frac{2}{3}$ - czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v\cdot t = 336 \\ (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $t=\frac{336}{v}$ i podstawiamy do równania drugiego.

Otrzymujemy równanie z niewiadomą v, które przekształcamy równoważnie

$$(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336,$$

$$\frac{2}{3}v-\frac{9\cdot 336}{v}-6=0,$$

$$\frac{2}{3}v^2-6v-9\cdot 336=0 \text{ (lub } 2v^2-18v-9072=0 \text{ lub } v^2-9v-4536=0\text{)}.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania

$$v_1=72,\ v_2=-63<0.$$

Drugie z tych rozwiązań odrzucamy (prędkość nie może być ujemna).

Gdy $v=72$, to wtedy $v-9=63$.

Odpowiedź: Średnia prędkość pierwszego pociągu jest równa $72\ \mathrm{km/h}$, średnia prędkość drugiego pociągu równa się $63\ \mathrm{km/h}$.

Schemat oceniania

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v, t oznaczających odpowiednio, prędkość i czas. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, aby te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze równanie, w którym co najmniej jedna z wielkości (prędkość, czas) jest uzależniona od przyjętej niewiadomej, np.:

$$(v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$v\cdot t=336 \text{ i } (v-9)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } v\cdot t=336 \text{ i } (v+9)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą v lub t.

$$(v-9)\left(\frac{336}{v}+\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}-9\right)\left(t+\frac{2}{3}\right)=336$$

$$\text{albo } (v+9)\left(\frac{336}{v}-\frac{2}{3}\right)=336 \text{ albo } \left(\frac{336}{t}+9\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)=336 .$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie) ....4 pkt

- zdający rozwiąże równanie z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu zapisze prędkości obu pociągów

albo

- zdający rozwiąże równanie kwadratowe i zapisze prędkość tylko jednego pociągu.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zdający obliczy średnie prędkości obu pociągów: średnia prędkość pierwszego pociągu równa się 72 km/h, średnia prędkość drugiego pociągu równa się 63 km/h.

Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązania, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Jeżeli zdający oznaczy średnią prędkość pierwszego pociągu przez v (w km/h), a przez t czas przejazdu pierwszego pociągu na tej trasie, a potem zapisze, że prędkość średnia drugiego pociągu jest równa $v+9$ i czas przejazdu drugiego pociągu na tej trasie

jest równy $t-\frac{2}{3}$, a następnie zapisze układ równań $v\cdot t=336$ i $(v+9)\cdot\left(t-\frac{2}{3}\right)=336$ i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (otrzymując odpowiednio $v=63$ i $v+9=72$ albo $v=63$ i $v-9=54$).

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pierwszego pociągu, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}}$$

$$\begin{cases}336=v\cdot t\\ 336=(v-9)t+\frac{2}{3}\end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t+\frac{2}{3}$ w nawias. Zapis równania $v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość pierwszego pociągu, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pierwszy pociąg

$$v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}} \qquad \begin{cases}v=\frac{336}{t}\\ v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}}\end{cases} \qquad \frac{363}{t}-9=\frac{336}{t+}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{363}{t}-9=\frac{336}{t+}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 336 i pominął liczbę $\frac{2}{3}$ w mianowniku ułamka.

Przykład 3.

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $v^2+9v-4536=0$ zamiast równania $v^2-9v-4536=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realną prędkością jednego z pociągów, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.