Przykładowe rozwiązania

(E. Ludwikowska, M. Zygora, M. Walkowiak)

Zadanie 1.
Rozwiąż równanie: $2\cos^2 x - 2\cos^2 x \sin x = 1 - \sin x$, w przedziale $x \in \langle 0{,}2\pi\rangle$.
Rozwiązanie:

$$2\cos^2 x - 2\cos^2 x \sin x = 1 - \sin x$$
$$2\cos^2 x\,(1 - \sin x) - (1 - \sin x) = 0$$
$$(1 - \sin x)(2\cos^2 x - 1) = 0$$
$$(1 - \sin x) = 0 \; lub \; \left(\sqrt{2}\,cos\,x + 1\right) = 0 \; lub \; \left(\sqrt{2}\,cos\,x - 1\right) = 0$$
$$sinx = 1 \;\; lub \; cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; lub \; cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

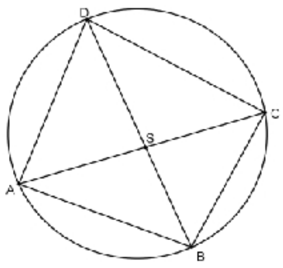
Uwzględniając, że x$\in \langle 0,\ 2\pi\rangle$ otrzymujemy

Odp.: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ lub $x = \frac{7\pi}{4}$.

Zadanie 2.
Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy,
gdy $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$.

Rozwiązanie:
Cz.I. Udowodnienie, że jeżeli czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg, to $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$. $(\Rightarrow)$

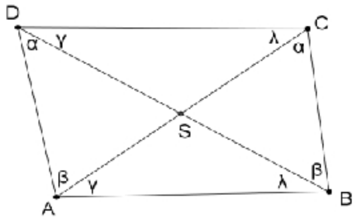
Zakładamy, że czworokąt ABCD można wpisać w okrąg.
Udowodnimy, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, gdzie S jest punktem przecięcia jego przekątnych.



Zauważmy, że $\angle$ ADS = $\angle$ ACB (kąty wpisane oparte na tym samym łuku).
$\angle$ DSA = $\angle$ BSC (kąty wierzchołkowe).
Z tego wynika, że trójkąt DSA jest podobny do trójkąta BSC (na mocy cechy kk).
Zatem z podobieństwa trójkątów wynika, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, co należało udowodnić.

Cz.II .Udowodnienie, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.$(\Leftarrow)$

Zakładamy teraz, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$.
Udowodnimy, że na tym czworokącie można opisać okrąg.



Ponieważ $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$ i $\angle$ASD = $\angle$BSC (kąty wierzchołkowe), zatem trójkąty ASD oraz BSC są podobne (na mocy cechy bkb).
Z tego wynika, że $\angle$ADS = $\angle$BCS = α oraz $\angle$DAS = $\angle$SBC = β,
również $\angle$ASB = $\angle$DSC (kąty wierzchołkowe).
Skoro $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to również $\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|DS|}{|CS|}$.
Zatem trójkąty DSC oraz BSA są podobne (na mocy cechy bkb).
Stąd $\angle$CDS = $\angle$SAB = γ oraz $\angle$ABS = $\angle$DCS = λ.
Mamy więc
$\angle$BAD + $\angle$BCD = $\gamma + \beta + \lambda + \alpha$ oraz $\angle$ABC + $\angle$CDA = $\lambda + \beta + \gamma + \alpha$.
Sumy przeciwległych kątów są zatem równe, a więc na mocy twierdzenia na tym czworokącie można opisać okrąg, co należało udowodnić.

Zadanie 3.

Dane są funkcje $f(x) = \frac{2x+b}{ax+1}$ oraz $g(x) = \frac{ax+c}{ax+1}$, o których wiadomo, że ich wykresy mają punkt wspólny $P\left(-9, \frac{11}{13}\right)$, a miejscem zerowym funkcji g jest liczba:-$\frac{5}{3}$. Wyznacz wartości parametrów $a,\ b,\ c$.

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy fakt, że miejscem zerowym funkcji g jest liczba $-\frac{5}{3}$:

$$0 = \frac{a \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + c}{a \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 1}$$

stąd $-\frac{5}{3}a + c = 0$, czyli $c = \frac{5}{3}a$.

Zapisujemy zależność wynikająca z faktu, że punkt $P = \left(-9, \frac{11}{13}\right)$ należy do funkcji g:

$\frac{11}{13} = \frac{-9a+c}{-9a+1}$.

Z proporcji: $11(-9a+1) = 13(-9a+c)$

$-99a + 11 = -117a + 13c$

$-99a+117a=13c-11$

$18a=13c-11$.

Zatem tworzymy układ równań: $\begin{cases} c=\frac{5}{3}a \\ 18a=13c-11 \end{cases}$.

Podstawiając otrzymujemy: $\begin{cases} c=\frac{5}{3}a \\ 18a=13\left(\frac{5}{3}a\right)-11 \end{cases}$.

Rozwiązujemy drugie równanie układu:

$18a=\frac{65}{3}a-11 \ /\cdot 3$

$54a=65a-33$

$-11a=-33 \ \ / : (\text{-}11)$

$a=3$

Podstawiamy wyznaczone a do pierwszego równania i otrzymujemy $c=\frac{5}{3}\cdot 3=5$.

Następnie wykorzystujemy fakt, że punkt P należy do funkcji f i obliczamy b:

$\frac{11}{13}=\frac{2\cdot(-9)+b}{3\cdot(\text{-}9)+1}$

$\frac{11}{13}=\frac{-18+b}{-26}$

$-286=-234+13b$

$-13b = 52 \ /:((-13)$

$b=-4$.

Odp.: a = 3, b = −4, c = 5.

Zadanie 4.

Narysuj wykres funkcji $f(x)=\frac{\cos x+|sinx|}{cosx}$ dla $x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.
Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0\le f(x)<2$.

Rozwiązanie:

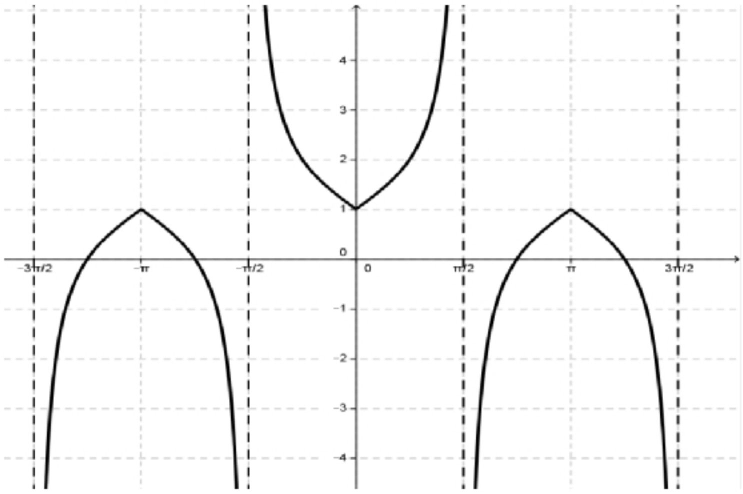
Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i przekształcamy wzór funkcji do postaci

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{cosx+sinx}{cosx};\ x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\pi\right\rangle\cup\left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right\rangle\\ \dfrac{cosx-sinx}{cosx};\ x\epsilon\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Następnie stosujemy związek $\frac{sinx}{cosx}=tgx$ i otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases}1+tgx;\ x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\pi\right\rangle\cup\left\langle 0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right\rangle\\ 1-tgx;\ x\epsilon\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Sporządzamy wykres funkcji i podajemy zbiór rozwiązań nierówności



Odp.: $0\le f(x)<2 \;\Leftrightarrow\; x\in\langle-\frac{5}{4}\pi,-\frac{3}{4}\pi\rangle\cup(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\cup\langle\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\rangle$

Zadanie 5.

Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 52. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej12, a do trzeciej 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz ten ciąg.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_1, a_{2,}a_3$ -wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego,
a_1+2, a_2+12, a_3+6 -wyrazy ciągu arytmetycznego.

Zapisujemy układ zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz ciągu geometrycznego

$$\begin{cases}(a_2+12)-(a_1+2)=(a_3+6)-(a_2+12)\\ a_1+a_2+a_3=52\end{cases}$$

Po zastosowaniu wzoru ogólnego na wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 52 \\ a_1 + a_1 q^2 - 2a_1 q = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{52}{1+q+q^2} \\ a_1 = \dfrac{16}{1+q^2-2q} \end{cases} \quad q \neq 1$$

Stąd otrzymujemy równanie $\frac{52}{1+q+q^2} = \frac{16}{1+q^2-2q}$,

które po uporządkowaniu ma postać

$$3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

$$\Delta = 64$$

$$q = 3 \text{ lub } \quad q = \frac{1}{3}.$$

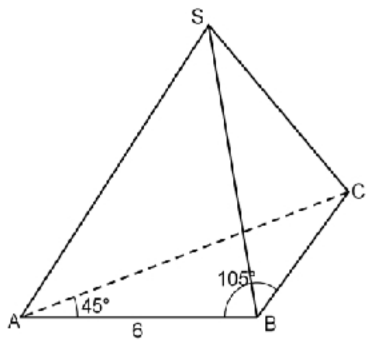
Obliczamy odpowiednio $a_1 = 4$, $a_1 = 36$.

Ciąg jest rosnący, więc odrzucamy przypadek $q = \frac{1}{3}$.

Odp.: Szukany ciąg to 4,12,36.

Zadanie 6.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden z boków ma długość 6, a kąty do niego przyległe mają miary 45° i 105°. Wysokość ostrosłupa ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.



Rozwiązanie:

Dane:

$|AB| = 6$

$|\angle BAC| = 45^\circ$

$|\angle CBA| = 105^\circ$

Szukane:

V

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta ABC} \cdot H$$

W $\Delta\ ABC$

$|\angle BCA| = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$

Oznaczmy $|AC| = x$,   z twierdzenia sinusów w $\Delta\, ABC$ mamy

$$\frac{6}{sin30^{\circ}} = \frac{x}{sin105^{\circ}}$$

$$x = \frac{6 \cdot sin105^{\circ}}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot sin105^{\circ}$$

$sin105^{\circ} = \sin(60^{\circ} + 45^{\circ}) = sin60^{\circ} \cdot cos45^{\circ} + cos60^{\circ} \cdot sin45^{\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

Stąd $x = 12 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot sin45^{\circ} = 9\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (9\sqrt{3} + 9)\ [j.^2\,]$$

Z wniosku z twierdzenia sinusów

$$2R = \frac{6}{sin30^{\circ}} = 12$$

Stąd $H = 6$.

Obliczamy objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(9\sqrt{3} + 9\right) \cdot 6 = (18\sqrt{3} + 18)[j.^3\,]$$

Odp.: $V = (18 + 18\sqrt{3})[j.^3\,]$

Zadanie 7.

Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$, którego suma wszystkich współczynników jest równa 4, a suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych. Wykaż, że reszta $R(x)$ z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x + 1)(x - 1)$ jest równa $R(x) = 2x + 2$.

Dowód:

Z twierdzenia o rozkładzie wielomianu mamy

$$W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

Skoro $st.\, W(x) > 2$ i $st.\, P(x) = 2$, to $R(x) = ax + b$, zatem

$$W(x) = (x - 1)(x + 1)Q(x) + ax + b.$$

Suma wszystkich współczynników jest równa 4, tzn. $W(1) = 4$.

Suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych, tzn. $W(-1) = 0$.

Z twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - r)$ mamy ponadto

$$R(1) = W(1) \text{ oraz } R(-1) = W(-1).$$

Mamy zatem $\begin{cases} a + b = 4 \\ -a + b = 0 \end{cases}$

skąd $a = 2$ i $b = 2$, czyli

$$R(x) = 2x + 2. \text{ cnd}$$

Zadanie 8.
Narysuj wykres funkcji

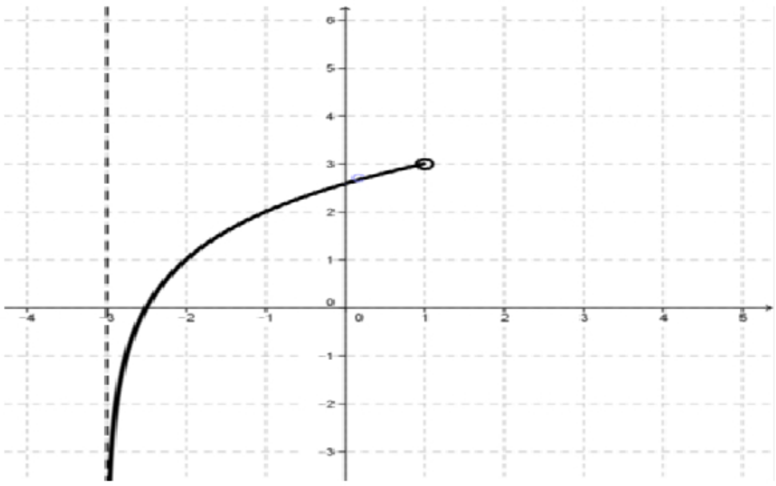
$$f(x) = log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right).$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy dziedzinę funkcji:

<table>
<tr><td>$-x^3 - 5x^2 - 3x + 9 > 0$ i
W(1)=0
$-(x-1)(x^2+6x+9) > 0$
$-(x-1)(x+3)^2 > 0$
$x \epsilon (-\infty; -3) \cup (-3; 1)$</td><td>$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} > 0$
$\Delta = 4$
$x_1 = 1, x_2 = -3$
$x \epsilon (-3; 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D_f = (-3; 1)$</td></tr>
</table>

Przekształcamy wzór funkcji:

$$f(x) = log_2\frac{-x^3 - 5x^2 - 3x + 9}{-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}} = log_2\frac{-(x-1)(x+3)^2}{-\frac{1}{2}(x-1)(x+3)} = log_2 2(x+3)$$
$$= log_2 2 + log_2(x+3) = 1 + log_2(x+3)$$



Zadanie 9. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{8}{4}$

Oznaczamy zdarzenia losowe i wyznaczamy liczbę zdarzeń sprzyjających tym zdarzeniom:

A_1 –zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3: $\overline{\overline{A_1}} = \binom{5}{3}$

A_2 –zdarzenie polegające na tym, że największą wylosowaną liczbą jest 7: $\overline{\overline{A_2}} = \binom{6}{3}$

$A = A_1 \cup A_2$ -zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3 lub największą wylosowaną liczbą jest 7

$A_1 \cap A_2$-zdarzenie polegające na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3 i największą wylosowaną liczbą jest 7: $\overline{\overline{A_1 \cap A_2}} = \binom{3}{2}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A

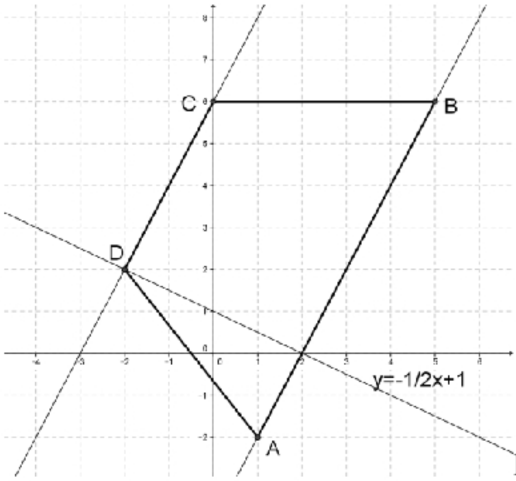
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Odp.: $P(A) = \frac{27}{70}$.

Zadanie 10.

Punkty $B = (5,6)$ i $C = (0,6)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy AB i CD są prostopadłe do prostej k o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu, wiedząc, że punkt D należy do prostej k.

Rozwiązanie:



Prosta CD jest prostopadła do prostej k, zatem jej współczynnik kierunkowy $a = 2$, mamy więc $pr. CD: y = 2x + b$.

Skoro punkt C należy do tej prostej otrzymujemy $6 = 2 \cdot 0 + b$, skąd $pr. CD: y = 2x + 6$.

Punkt D jest punktem przecięcia się prostej k z prostą CD, zatem jego współrzędne obliczamy z układu równań

$$\begin{cases} y = 2x + 6. \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

i otrzymujemy $D = (-2,2)$.

Wyznaczamy równanie prostej AB, która jest równoległa do prostej CD, zatem ma taki sam współczynnik kierunkowy.
Skoro do prostej AB należy punkt B jej równanie ma postać

$$pr. AB: y = 2x - 4$$

Trapez jest równoramienny, więc mamy $|AD| = |DC|$.
Ponadto punkt A należy do prostej AB, zatem $A = (x, 2x - 4)$.
Otrzymujemy równanie

$$\sqrt{(x+2)^2 + (2x-6)^2} = 5,$$

skąd $A = (1, -2)$ lub $A = (3,2)$.

Odp.: $A = (1, -2)$ lub $A = (3,2)\ oraz\ D = (-2,2)$.

Zadanie 11.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in R$ zachodzi nierówność

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c.$$

Rozwiązanie:

Założenie: $a, b, c \in R$
Teza: $a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$

Dowód:

Niech $a, b, c \in R$ i załóżmy, że

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 < 2a + 12b + 6c$$

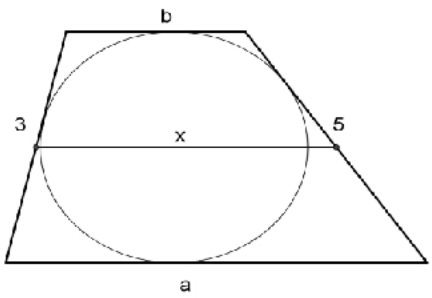
$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) < 0$$

$$(a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 < 0$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną oraz suma liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną, zatem teza jest prawdziwa. cnd.

Zadanie 12.
W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoległe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku $5:11$. Oblicz długości podstaw trapezu.

Rozwiązanie:



Dane:	Szukane:
$c = 5$	a, b
$d = 3$	
$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{11}$	

Stosujemy twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i otrzymujemy: $a + b = 8$.

Wyznaczamy długość odcinka łączącego środki nierównoległych boków trapezu:

$$x = \frac{a+b}{2} = 4$$

Zauważmy, że wysokości obu powstałych trapezów są równe. Obliczamy pola trapezów:
$P_1 = \frac{b+x}{2}h = \frac{(b+4)h}{2}$, $P_2 = \frac{a+x}{2}h = \frac{(a+4)h}{2}$

Zapisujemy stosunek pól obu części: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{(b+4)h}{2}}{\frac{(a+4)h}{2}} = \frac{(b+4)h}{2} \cdot \frac{2}{(a+2)h} = \frac{b+4}{a+4}$.

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} \frac{b+4}{a+4} = \frac{5}{11} \\ a + b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 11b = 24 \\ a + b = 8 \ / \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a - 11b = 24 \\ -5a - 5b = -40 \end{cases},$$

Skąd $-16b = -16$ /:(−16)

$b = 1,$

zatem $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$

Odp.: $a = 7,\ b = 1.$