

## Przykładowe rozwiązania

(E. Ludwikowska, M. Zygora, M. Walkowiak)

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Odpowiedź	D	C	B	A	C	B	C	C	D	C	C	D	A

Zadanie	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	B	A	D	C	A	B	C	C	D	D	A	A

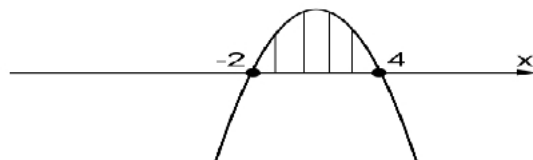
Zadanie 26.

Rozwiąż nierówność:  $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ .

Rozwiązanie:

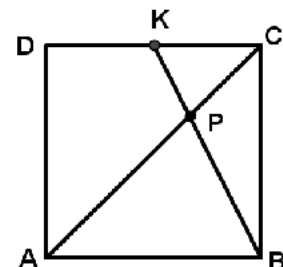
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad x_2 = \frac{-2+6}{2 \cdot (-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

Odp.:  $x \in \langle -2, 4 \rangle$ .

Zadanie 27.

Na boku  $DC$  kwadratu  $ABCD$  obrano punkt  $K$  tak, że  $|DK| = |KC|$  (rys.). Przekątna  $AC$  kwadratu przecina się z odcinkiem  $BK$  w punkcie  $P$ . Uzasadnij, że pole trójkąta  $ABP$  jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta  $KCP$ .



Rozwiązanie:

Zauważmy, że  $\angle CAB = \angle ACD$  (kąty naprzemianległe) oraz  $\angle APB = \angle CPK$  (kąty wierzchołkowe), zatem trójkąt  $ABP$  jest podobny do trójkąta  $KCP$  (na mocy cechy kk).

Skala podobieństwa  $k = \frac{|AB|}{|KC|}$ ,  $|AB| = 2|KC|$ , więc  $k = \frac{2|KC|}{|KC|} = 2$ .

Stosunek pól trójkątów podobnych w skali  $k$ , jest równy kwadratowi skali podobieństwa  $k^2$ ,

zatem stosunek pól trójkątów  $ABP$  i  $KPC$  jest równy 4, czyli pole trójkąta  $ABP$  jest cztery razy większe od pola trójkąta  $KCP$ . c.n.d.

Zadanie 28.

Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

*Rozwiązanie:*

Zapisujemy układ równań wykorzystując wzór na dowolny wyraz ciągu geometrycznego

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 18 \\ a_1 q^5 = 486 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy  $a_1 = \frac{18}{q^2}$  ( $q \neq 0$ ) i po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy  $\frac{18}{q^2} \cdot q^5 = 486$ .

Stąd  $q^3 = 27$ , więc  $q = 3$ .

Podstawiamy  $q = 3$  do pierwszego równania układu i wyliczamy  $a_1 = 2$ .

Odp.:  $a_1 = 2, q = 3$ .

Zadanie 29.

Wykaż, że liczby  $a = \frac{-5}{2\sqrt{2}+3}$  oraz  $b = |10\sqrt{2} - 15|$  są liczbami przeciwnymi.

*Rozwiązanie:*

Przekształcamy liczbę  $a$  usuwając niewymierność z mianownika ułamka.

$$a = \frac{-5}{2\sqrt{2}+3} \cdot \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3} = \frac{-10\sqrt{2}+15}{(2\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{-10\sqrt{2}+15}{-1} = 10\sqrt{2}-15$$

Po wykorzystaniu definicji wartości bezwzględnej doprowadzamy liczbę  $b$  do postaci:

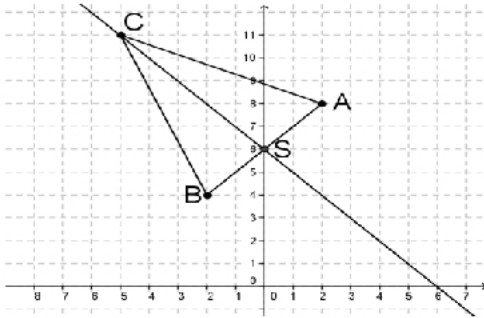
$$b = |10\sqrt{2} - 15| = -10\sqrt{2} + 15$$

Stwierdzamy, że liczby  $a$  i  $b$  są przeciwny, bo  $a + b = 0$ .

## Zadanie 30.

W trójkącie równoramiennym  $ABC$  o podstawie  $AB$  poprowadzono wysokość z wierzchołka  $C$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli  $A = (2, 8)$ ,  $B = (-2, 4)$ .

*Rozwiązanie:*



Obliczamy współrzędne środka  $S$  odcinka  $AB$ , gdzie  $A = (2, 8)$ ,  $B = (-2, 4)$ .

$$x_s = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0, \quad y_s = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6,$$

zatem  $S = (0, 6)$ .

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 8}{-2 - 2} = \frac{-4}{-4} = 1$ .

Współczynnik prostej prostopadłej jest równy  $-1$ .

Wyznaczamy równanie prostej, o współczynniku kierunkowym  $-1$ , która przechodzi przez punkt  $S = (0, 6)$ .

$$y = ax + b$$

$$6 = -1 \cdot 0 + b, \quad \text{zatem } b = 6.$$

Odp.: Równanie szukanej prostej ma postać:  $y = -x + 6$ .

## Zadanie 31.

Ze zbioru liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  – otrzymana liczba będzie mniejsza od 432.

*Rozwiązanie:*

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $\bar{\Omega} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $\bar{A} = 43$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{43}{60}$ .

Zadanie 32.

Z miast A i B odległych o 330 km wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

*Rozwiązanie:*

Wprowadzamy oznaczenia:

	Średnia prędkość	Czas	Droga
Samochód jadący z miasta A	$v - 9$	$t + \frac{1}{3}$	168 km
Samochód jadący z miasta B	$v$	$t$	162 km

Wykorzystując warunki zadania, tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} (v - 9) \left( t + \frac{1}{3} \right) = 168 \\ vt = 162 \end{cases}$$

Wyznaczamy z drugiego równania  $t = \frac{162}{v}$  i wstawiamy do pierwszego równania układu:

$$(v - 9) \left( \frac{162}{v} + \frac{1}{3} \right) = 168$$

$$162 + \frac{1}{3}v - \frac{1458}{v} - 3 = 168$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\frac{1}{3}v^2 - 9v - 1458 = 0$$

$$\Delta = 81 + 1944 = 2025$$

$$\sqrt{\Delta} = 45, \text{ stąd } v_1 = 81; v_2 = -54$$

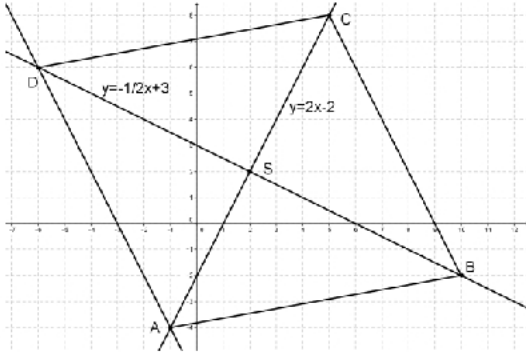
Odrzucamy rozwiązanie  $v_2 = -54$ , które jest niezgodne z warunkami zadania.

Odp.: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

## Zadanie 33.

Wyznacz pole i obwód rombu  $ABCD$  wiedząc, że przekątna  $AC$  jest zawarta w prostej o równaniu  $y = 2x - 2$  oraz  $A = (-1, -4)$  i  $D = (-6, 6)$ .

*Rozwiązanie:*



Wyznaczamy równanie prostej  $BD$ , prostopadłej do prostej  $AC$  o równaniu  $y = 2x - 2$ , przechodzącej przez punkt  $D = (-6, 6)$ .

Współczynnik prostej prostopadłej do prostej  $AC$  jest równy  $-\frac{1}{2}$ .

Zatem:  $y = ax + b$

$$6 = -\frac{1}{2} \cdot (-6) + b$$

Stąd  $b = 3$ .

Prosta  $BD$  ma postać:  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .

Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia przekątnych  $S$  rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy metodą podstawiania

$$\begin{cases} 2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

$$2x + \frac{1}{2}x = 3 + 2$$

$$2\frac{1}{2}x = 5$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{czyli } S = (2, 2).$$

Obliczamy długości odcinków AS oraz DS.:

$$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}$$

$$|AS| = \sqrt{(2 + 1)^2 + (2 + 4)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} [j.]$$

$$|DS| = \sqrt{(x_S - x_D)^2 + (y_S - y_D)^2}$$

$$|DS| = \sqrt{(2 + 6)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} [j.]$$

Zatem długości przekątnych rombu są równe:

$$|AC| = 2|AS| = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} [j.]$$

$$|BD| = 2|DS| = 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} [j.]$$

Obliczamy pole rombu korzystając ze wzoru:  $P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$ .

$$P = \frac{6\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{2} = \frac{48 \cdot 5}{2} = 120 [j.^2]$$

Obliczamy długość boku rombu AD korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASD:

$$|AD|^2 = |AS|^2 + |DS|^2$$

$$|AD|^2 = (3\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2$$

$$|AD|^2 = 45 + 80 = 125$$

$$|AD| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} [j.]$$

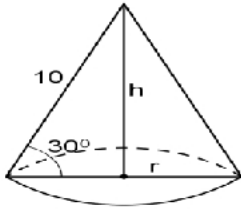
$$Ob = 4|AD| = 4 \cdot 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5} [j.]$$

Odp.: Pole rombu jest równe  $120 [j.^2]$ , a obwód  $20\sqrt{5} [j.]$

Zadanie 34.

Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$ , przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

*Rozwiązanie:*



Obliczamy długość promienia stożka:  $\cos 30^\circ = \frac{r}{10}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{10}$$

$$r = 5\sqrt{3}[\text{j.}]$$

Obliczamy długość wysokości stożka:  $\sin 30^\circ = \frac{h}{10}$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{10}$$

$$h = 5[\text{j.}]$$

Obliczamy objętość stożka:  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 125\pi[\text{j.}^3]$ .

Wyznaczamy zależność między objętością stożka i łączną objętością sześciu kulek:  $V_s = 6V_k$ .

Niech  $R$  –promień kulki, więc objętość jednej kulki jest równa  $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

Obliczamy długość promienia jednej kulki:

mamy zatem

$$125\pi = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$R^3 = \frac{125}{8}$$

$$R = \frac{5}{2}[\text{j.}]$$

Odp.: Długość promienia kulki:  $R = \frac{5}{2}[\text{j.}]$ .