Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2012

Zadanie 1. (0–4)

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)

Rozwiązanie
Niech a oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to: $a+1$, $a+2$, $a+3$.

Zapisujemy zatem równanie kwadratowe $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$

które po przekształceniu przyjmuje postać $3a^2+5a+2=0$.

Równanie to ma dwa rozwiązania: $a_1=-1$, $a_2=-\frac{2}{3}$. Rozwiązanie $-\frac{2}{3}$ odrzucamy jako sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita).
Zatem szukane liczby to: -1, 0, 1, 2.

Schemat oceniania rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………………………………………………………............ 1 pkt
Zapisanie, że szukane liczby to: $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3$, gdzie a jest liczbą całkowitą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zapisanie równania z jedną niewiadomą:

$$a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2 \quad \text{lub} \quad 3a^2+5a+2=0$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……..…………………………….... 3 pkt

- Przekształcenie równania $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ do postaci równania kwadratowego z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste),

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego $3a^2+5a+2=0$, nieodrzucenie rozwiązania $-\frac{2}{3}$ i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zapisanie czwórki liczb całkowitych spełniających warunki zadania: -1, 0, 1, 2.

Uwagi
1. Jeżeli zdający źle zinterpretuje treść zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający bez wykonywania rachunków poda odpowiedź i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 2. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie nierówności wielomianowej (IV.3.c.R)

<u>**I sposób rozwiązania**</u>
Rozwiązanie nierówności wielomianowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to zastosowanie jednej z kilku metod, które pozwalają zapisać wielomian w postaci iloczynowej, drugi etap to rozwiązanie nierówności.
Pierwszy etap: zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej.
<u>I wariant</u> (grupowanie wyrazów)

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4+x^2-2x\geq 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:

$$x^4+x^2-2x=x\left(x^3+x-2\right)=x\left(x\left(x^2-1\right)+2\left(x-1\right)\right)=$$
$$=x\left(x\left(x-1\right)\left(x+1\right)+2\left(x-1\right)\right)=x\left(x-1\right)\left(x\left(x+1\right)+2\right)=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)$$

<u>II wariant</u> (odgadnięcie pierwiastka i dzielenie metodą pisemną)

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4+x^2-2x\geq 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej: $x^4+x^2-2x=x\left(x^3+x-2\right)$. Zauważamy, że $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu x^3+x-2 i dzielimy wielomian x^3+x-2 przez dwumian $x-1$ sposobem pisemnym lub za pomocą algorytmu Hornera, otrzymując x^2+x+2. Następnie zapisujemy nierówność w postaci iloczynowej $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\geq 0$.

Drugi etap: rozwiązanie nierówności.
Zauważamy, że trójmian x^2+x+2 przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej *x*, zatem rozwiązanie nierówności $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right)\geq 0$, czyli sumą przedziałów $\left(-\infty,0\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right)$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zapisanie wielomianu x^4+x^2-2x w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest x lub $x-1$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zapisanie nierówności w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego , np. $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

- Zauważenie, że rozwiązanie nierówności $x^4+x^2-2x\geq 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right)\geq 0$

albo

- narysowanie i uzupełnienie tabeli znaków lub sporządzenie szkicu wykresu wielomianu z uwzględnieniem jego miejsc zerowych.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności $x^4+x^2\geq 2x$: $x\in\left(-\infty,0\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right)$.

Uwaga
Jeśli zdający podzieli nierówność przez x lub $x-1$, bez rozpatrzenia odpowiednich przypadków to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania
Rozwiązujemy nierówność w trzech przedziałach:

I. $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$, II. $x \in (0,1)$, III. $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$

I. $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$

Wtedy $x^4 \geq 0$ i $x^2 \geq 0$, a $2x \leq 0$.
Stąd $x^4 + x^2 \geq 2x$ dla każdego $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$.

II. $x \in (0,1)$

Wtedy $x^4 < x$ i $x^2 < x$.
Stąd $x^4 + x^2 < 2x$ dla każdego $x \in (0,1)$.

Zatem dana nierówność nie ma rozwiązań w tym przedziale.

III. $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$

Wtedy $x^4 \geq x$ i $x^2 \geq x$.
Stąd $x^4 + x^2 \geq 2x$ dla każdego $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$.

Odp. Rozwiązaniem nierówności $x^4 + x^2 \geq 2x$ jest zbiór $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje **po 1 punkcie** za rozwiązanie nierówności w każdym z trzech przedziałów.
Czwarty punkt zdający otrzymuje za podanie odpowiedzi końcowej.

Zadanie 3. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)

Rozwiązanie
Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu x:
$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 3\cos x + 2 = 0$.

Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe, otrzymując: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Rozwiązujemy równania $\cos x = 1$ i $\cos x = \frac{1}{2}$.

Zapisujemy rozwiązania równań:
$x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą
lub
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Schemat oceniania rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej argumentu x, np.:
$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 3\cos x + 2 = 0$ lub $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Rozwiązanie równania $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ z niewiadomą $\cos x$: $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Rozwiązanie jednego z równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

- Rozwiązanie równania: $x = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą

albo

- $x = n \cdot 360^\circ$, gdzie n jest liczbą całkowitą lub $x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ$, gdzie n jest liczbą całkowitą lub $x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1, 1 \rangle$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 4. (0–6)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)

I sposób rozwiązania

Obliczamy $\Delta = m^2 - 12$ i następnie $x_1 = \frac{m+2-\sqrt{m^2-12}}{2}$, $x_2 = \frac{m+2+\sqrt{m^2-12}}{2}$.

Wówczas

$$x_1^2 = \frac{(m+2)^2 - 2(m+2)\sqrt{m^2-12} + m^2 - 12}{4} = \frac{2m^2+4m-8-2(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{m^2+2m-4-(m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}$$

i podobnie

$$x_2^2 = \frac{m^2+2m-4+(m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}.$$

Następnie

$$x_1^4 = \frac{\left(m^2+2m-4\right)^2 - 2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12} + (m+2)^2\left(m^2-12\right)}{4} =$$

$$= \frac{m^4+4m^3-4m^2-16m+16+m^4+4m^3-8m^2-48m-48-2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{2m^4+8m^3-12m^2-64m-32-2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}$$

i podobnie

$$x_2^4 = \frac{2m^4+8m^3-12m^2-64m-32+2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}.$$

Teraz

$x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$, czyli mamy równanie

$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$, czyli $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$.

Zatem $\left(m^2-6\right)^2 = 64$, stąd : $m^2 - 6 = -8$ lub $m^2 - 6 = 8$,

czyli $m^2 = -2$ lub $m^2 = 14$.

Przypadek $m^2 = -2$ jest niemożliwy; zatem $m^2 = 14$, czyli $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Należy na zakończenie zauważyć, że jeśli $m^2 = 14$, to $\Delta = m^2 - 12 = 14 - 12 = 2 > 0$, a więc oba pierwiastki x_1 i x_2 są rzeczywiste.

Uwaga

Zdający może rozpocząć od rozważenia nierówności $\Delta > 0$, czyli $m^2 - 12 > 0$. Otrzymuje $m < -2\sqrt{3}$ lub $m > 2\sqrt{3}$. Potem może sprawdzać, czy otrzymane rozwiązania są zgodne z tymi nierównościami.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania.
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:
a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2 - 12$.

Zatem $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 - 12 > 0$, czyli dla $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania ze zmienną m i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Wyznaczenie x_1 i x_2.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wyznaczenie x_1^2 i x_2^2.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....3 pkt
Wyznaczenie x_1^4 i x_2^4 i zapisanie równości $x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$.

Rozwiązanie bezbłędne części b) ....4 pkt
Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt
Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

Uwagi
1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ z etapu a) i równania $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

II sposób rozwiązania:

Tak jak w sposobie I obliczamy $x_1 = \dfrac{m + 2 - \sqrt{m^2 - 12}}{2}$, $x_2 = \dfrac{m + 2 + \sqrt{m^2 - 12}}{2}$.

Następnie przyjmujemy oznaczenie $t = \sqrt{m^2 - 12}$.
Wówczas

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{(m + 2 - t)^4}{2^4} + \frac{(m + 2 + t)^4}{2^4} = \frac{(m + 2 - t)^4 + (m + 2 + t)^4}{16}.$$

Korzystamy ze wzorów:

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Stąd $(a - b)^4 + (a + b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4$.

Zatem

$$x_1^4+x_2^4=\frac{2\left(m+2\right)^4+12\left(m+2\right)^2t^2+2t^4}{16}=\frac{\left(m+2\right)^4+6\left(m+2\right)^2t^2+t^4}{8}.$$

Ponieważ $t=\sqrt{m^2-12}$, więc $t^2=m^2-12$ i $t^4=m^4-24m^2+144$.

Mamy zatem

$$x_1^4+x_2^4=\frac{m^4+8m^3+24m^2+32m+16+\left(6m^2+24m+24\right)\left(m^2-12\right)+m^4-24m^2+144}{8}=$$

$$=\frac{8m^4+32m^3-48m^2-256m-128}{8}=m^4+4m^3-6m^2-32m-16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania.</u>

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, gdzie $\Delta=m^2-12$.

Zatem $\Delta>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-12>0$, czyli dla $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta\geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ do postaci równania z niewiadomą m i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Wyznaczenie x_1 i x_2.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Przyjęcie oznaczenia, np. $t=\sqrt{m^2-12}$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....3 pkt

Wyznaczenie x_1^4 oraz x_2^4 i zapisanie równości

$$x_1^4+x_2^4=\frac{\left(m+2-t\right)^4}{2^4}+\frac{\left(m+2+t\right)^4}{2^4}=\frac{\left(m+2-t\right)^4+\left(m+2+t\right)^4}{16}=m^4+4m^3-16m^2-32m-16$$

Rozwiązanie bezbłędne części b) ....4 pkt

Rozwiązanie równania $m^4-12m^2-28=0$: $m=\sqrt{14}$ lub $m=-\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta>0$.

<u>Uwagi</u>

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta>0$ z etapu a) i równania $m^4-12m^2+36=64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

III sposób rozwiązania:

Korzystamy ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m + 4$.

Mamy teraz:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= \left(\left(m+2\right)^2 - 2\left(m+4\right)\right)^2 - 2\left(m+4\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2 - 12$.

Zatem $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 - 12 > 0$, czyli dla $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania z niewiadomą *m* i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2$.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .... 3 pkt

Zapisanie wyrażenia $x_1^4 + x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m*, np.

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

Rozwiązanie bezbłędne części b) .... 4 pkt

Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

Uwagi

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ z etapu a) i równania $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

IV sposób rozwiązania:

Korzystamy ze wzorów Viète'a oraz ze wzoru na $(a+b)^4$.

$$(x_1+x_2)^4 = x_1^4+4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4 = x_1^4+x_2^4+4x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)+6\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= x_1^4+x_2^4+4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)+6\left(x_1x_2\right)^2$$

czyli

$$x_1^4+x_2^4=\left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2=$$

$$=(m+2)^4-4\cdot(m+4)\left((m+2)^2-2\cdot(m+4)\right)-6\cdot(m+4)^2=m^4+4m^3-6m^2-32m-16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

a) Pierwsza część polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, gdzie $\Delta=m^2-12$.

Zatem $\Delta>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-12>0$, czyli dla $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta\ge 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

b) Druga część polega na doprowadzeniu równania $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ np. do postaci $m^4-12m^2+36=64$ i rozwiązaniu tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..1 pkt

Skorzystanie z wzoru $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie równości: $x_1^4+x_2^4=\left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ....3 pkt

Zapisanie wyrażenia $x_1^4+x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m*, np.

$$x_1^4+x_2^4=\left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2=m^4+4m^3-6m^2-32m-16.$$

Rozwiązanie pełne części b) ....4 pkt

Rozwiązanie równania $m^4-12m^2-28=0$: $m=\sqrt{14}$ lub $m=-\sqrt{14}$.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta>0$.

Uwagi

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta>0$ z etapu a) i równania $m^4-12m^2+36=64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 5. (0–6)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (IV.5.c)

I sposób rozwiązania

Oznaczmy przez a, b, c kolejne liczby tworzące, w podanej kolejności, ciąg geometryczny. Przez a oraz q oznaczamy odpowiednio pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu geometrycznego. Wówczas $b = aq$ oraz $c = aq^2$. Z treści zadania wiemy, że ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c$ jest arytmetyczny, co oznacza, że jest spełniona równość $2(b+8) = a+c$, czyli $2(aq+8) = a+aq^2$. Ponadto, ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c+64$ jest geometryczny, więc $(b+8)^2 = a\cdot(c+64)$, a stąd $(aq+8)^2 = a\cdot(aq^2+64)$.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2(aq+8) = a+aq^2 \\ (aq+8)^2 = a\cdot(aq^2+64) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a = \dfrac{16}{1-2q+q^2}$ (przy założeniu, że $q \neq 1$)

i podstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{16}{1-2q+q^2}\cdot q - 4\cdot\frac{16}{1-2q+q^2} + 4 = 0$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego:

$$16q + 4(1-2q+q^2) - 64 = 0,$$

$$4q + 1 - 2q + q^2 - 16 = 0,$$

$$q^2 + 2q - 15 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $q_1 = -5,\ q_2 = 3$.

Jeżeli $q = -5$, to $a = \dfrac{4}{9}$, $b = -\dfrac{20}{9}$ oraz $c = -\dfrac{20}{9}\cdot(-5) = \dfrac{100}{9}$.

Jeżeli zaś $q = 3$, to $a = 4$, $b = 12$ oraz $c = 12\cdot 3 = 36$.

Zauważmy na zakończenie, że założenie $q \neq 1$ nie zmniejsza ogólności rozważań, bo gdyby $q = 1$, to otrzymalibyśmy (początkowy) ciąg geometryczny stały, zaś ciąg $(a,\ a+8,\ a)$ nie byłby arytmetyczny dla żadnej wartości a, wbrew treści zadania.

Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $(4,\ 12,\ 36)$ oraz $\left(\dfrac{4}{9}, -\dfrac{20}{9}, \dfrac{100}{9}\right)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, że:

liczby $a,\ aq,\ aq^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz liczby $a,\ aq+8,\ aq^2$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $a,\ aq+8,\ aq^2+64$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań, np.

$$\begin{cases} a + aq^2 = 2(aq+8) \\ (aq+8)^2 = a(aq^2+64) \end{cases}$$

Uwaga
Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt
Zapisanie równania z jedną niewiadomą np.: $q^2+2q-15=0$ lub $9a^2-40a+16=0$.

Uwaga
Jeżeli zdający w trakcie przekształcania układu równań popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 5 pkt

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $q^2+2q-15=0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne

lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt
Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $(4, 12, 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

II sposób rozwiązania
Oznaczmy przez a, b, c trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wówczas $b^2 = a\cdot c$. Ponieważ ciąg $(a, b+8, c)$ jest arytmetyczny, więc $2(b+8) = a + c$. Ponadto, ciąg $(a, b+8, c+64)$ jest geometryczny, zatem $(b+8)^2 = a\cdot(c+64)$.
Zapisujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b^2 = a\cdot c \\ 2(b+8) = a+c \\ (b+8)^2 = a\cdot(c+64) \end{cases}$$

a następnie przekształcamy go w sposób równoważny:

$$\begin{cases} c = 2b - a + 16 \\ b^2 = 2ab + 16a - a^2 \\ (b+8)^2 = 2ab + 16a - a^2 + 64a \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie i otrzymujemy $(b+8)^2 - b^2 = 64a$.
Stąd $a = \frac{b+4}{4}$. Podstawiamy $a = \frac{b+4}{4}$ do drugiego równania i otrzymujemy

$$b^2 = \frac{b+4}{4} \cdot \left(2b + 16 - \frac{b+4}{4}\right)$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego
$16b^2 = 7b^2 + 88b + 240$, czyli $9b^2 - 88b - 240 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $b_1 = -\frac{20}{9}$, $b_2 = 12$.

Jeżeli $b = -\frac{20}{9}$, to $a = \frac{4}{9}$ oraz $c = \frac{100}{9}$.

Jeżeli zaś $b = 12$, to $a = 4$ oraz $c = 36$.

Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $(4, 12, 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania zadania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, że liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz, że liczby $a, b+8, c$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, zaś liczby $a, b+8, c+64$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp . ... 2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań umożliwiającego obliczenie liczb *a*, *b*, *c*, np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b+8) = a + c \\ (b+8)^2 = a \cdot (c+64) \end{cases}$$

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania . ... 4 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.: $9a^2 - 40a + 16 = 0$ lub $9b^2 - 88b - 240 = 0$ lub $9c^2 - 424c + 3600 = 0$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli w trakcie przekształcania układu równań zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe). .... 5 pkt

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $9b^2 - 88b - 240 = 0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $(4, 12, 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

Zadanie 6. (0–6)

Modelowanie matematyczne	Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (III.8.e; 4.k)

<u>Rozwiązanie</u>

Wyznaczamy odległość punktów P i Q: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$.

Wyznaczamy wzór funkcji f opisującej wartość $|PQ|^2$:

$$f(m) = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 = \frac{5}{4}\left(m^2 - 20m + 500\right) \text{ dla } m \in \langle -1, 7 \rangle .$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f:

$$m_w = \left(\frac{5}{4} \cdot 20\right) : \left(2 \cdot \frac{5}{4}\right) = 25 : \frac{5}{2} = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10 .$$

Ponieważ $10 \notin \langle -1, 7 \rangle$, więc w tym przedziale funkcja f jest monotoniczna. Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji f dla $m \in \langle -1, 7 \rangle$ są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$$f(-1) = \frac{5}{4}(1 + 20 + 500) = 651{,}25 \text{ oraz } f(7) = \frac{5}{4}(49 - 140 + 500) = 511{,}25 .$$

Zatem najmniejsza i największa wartość $|PQ|^2$ to odpowiednio 511,25 oraz 651,25.

<u>Schemat oceniania rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie odległości między punktami P i Q: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$ lub

$$|PQ|^2 = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 .$$

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, np. $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 - m^2}$, to otrzymuje za całe zadanie **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .. .. 2 pkt

Zapisanie wzoru funkcji f w postaci, np.: $f(m) = \frac{5}{4}m^2 - 25m + 625$ lub $f(m) = \frac{5}{4}\left(m^2 - 20m + 500\right)$.

Uwaga
Dalszej ocenie podlega badanie tylko takich funkcji kwadratowych, które przyjmują wartości nieujemne w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania . ... 4 pkt

- Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f i stwierdzenie, że współrzędna ta nie należy do przedziału $\langle -1, 7\rangle$: $m_w = 10$ i $10 \notin \langle -1, 7\rangle$ i z rozwiązania wynika, że $f(10)$ nie jest żadną z poszukiwanych wartości

albo

- obliczenie $f(-1)$ i $f(7)$, zapisanie bez uzasadnienia, że $f(-1)$ jest wartością największą, $f(7)$ jest wartością najmniejszą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt
Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Podanie najmniejszej i największej wartość $|PQ|^2$ odpowiednio 511,25 oraz 651,25 z uzasadnieniem, np. powołanie się na monotoniczność lub stwierdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do podanego przedziału.

Uwaga
Jeśli zdający obliczy $f(10) = 500$, $f(-1) = 651{,}25$ i $f(7) = 511{,}25$ i stąd wywnioskuje, że najmniejszą wartością funkcji f jest 500, a największą 651,25, to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 7. (0–3)

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.2.b)

Rozwiązanie
Przekształcamy nierówność w sposób równoważny

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \ge 0,$$
$$\left(a^3 - a^2b\right) + \left(b^3 - ab^2\right) \ge 0,$$
$$a^2(a-b) + b^2(b-a) \ge 0,$$

$$(a-b)(a^2-b^2)\geq 0,$$
$$(a-b)^2(a+b)\geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia $a+b\geq 0$ oraz $(a-b)^2\geq 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b, co kończy dowód.

Schemat oceniania rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej $(a-b)(a^2-b^2)\geq 0$ lub

$(a-b)^2(a+b)\geq 0$, lub $(a-b)(a-b)(a+b)\geq 0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Przeprowadzenie pełnego dowodu.

Uwaga

1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $a+b$, nie zakładając, że $a+b\neq 0$, to otrzymuje **0 punktów.**
2. W przypadku gdy zdający podzieli nierówność przez $a+b>0$ i nie rozpatrzy przypadku $a+b=0$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 8. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R)

Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 12 na czynniki pierwsze $12=3\cdot 2\cdot 2$.

Mamy więc trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12:

1. Wśród cyfr tej liczby są „3”, „4” i sześć „1” ($12=3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot 7=56$ – wybieramy miejsce dla „3” na 8 sposobów i z pozostałych dla „4” na 7 sposobów.
2. Wśród cyfr tej liczby są „2”, „6” i sześć „1” ($12=2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot 7=56$ – wybieramy miejsce dla „2” na 8 sposobów i z pozostałych dla „6” na 7 sposobów.
3. Wśród cyfr tej liczby są dwie „2”, jedna „3” i pięć „1” ($12=3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot\binom{7}{2}=168$ – wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla „3” a następnie dwa miejsca z pozostałych siedmiu dla „2”.

Zatem liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12 jest $56+56+168=280$.

Schemat oceniania rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$12=3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$12=2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

$12=3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie wszystkich trzech, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$$12 = 3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$
$$12 = 2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$
$$12 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$

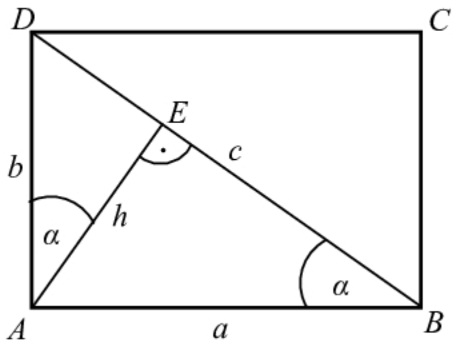
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w co najmniej dwóch z trzech możliwości.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12:
$56+56+168=280$.

Zadanie 9. (0–5)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych (IV.7.c.R)

<u>I sposób rozwiązania</u>



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DAB otrzymujemy $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta DEA (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku D), więc $\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|}=\frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Stąd

$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pole trójkąta AED jest równe $P_{ADE}=\frac{1}{2}h\cdot|DE|=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DAB otrzymujemy $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta DEA (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku D), więc $\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|}=\frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Stąd

$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $|DE|=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Wyznaczamy sinus kąta EAD w trójkącie AED: $\sin|\sphericalangle EAD| = \frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pole trójkąta AED jest równe:

$$P_{AED} = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \sin|\sphericalangle EAD| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Zauważenie, że trójkąty AED (lub AEB) i BAD są podobne i zapisanie odpowiedniej proporcji np.: $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ lub $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}$

albo

- zapisanie pola trójkąta AED: $P = \frac{|AE| \cdot |DE|}{2}$ lub $P = \frac{|AE| \cdot |AD| \cdot \sin|\sphericalangle EAD|}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka DE: $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub AE: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub

$\sin|EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Obliczenie długości obu odcinków DE: $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i AE: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

lub

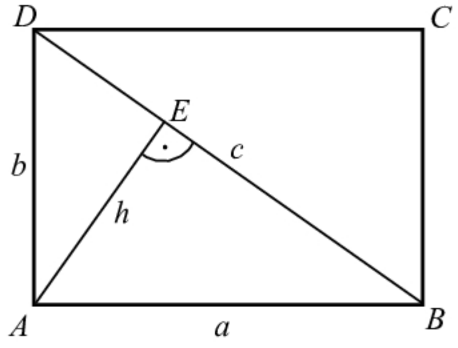
- obliczenie długości odcinka AE: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\sin|\sphericalangle EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trójkąta AED: $P_{AED} = \frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

III sposób rozwiązania



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Trójkąt *AED* jest podobny do trójkąta *BAD*, a ten jest podobny do trójkąta *BEA*, więc trójkąt *BEA* jest podobny do trójkąta *AED*. Skala tego podobieństwa jest równa $\frac{a}{b}$. Stosunek pól tych trójkątów jest równy $\frac{P_{BEA}}{P_{AED}}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Stąd $P_{BEA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot P_{AED}$.

Ponieważ $P_{ABD}=\frac{1}{2}ab=P_{BEA}+P_{AED}$, więc $\frac{1}{2}ab=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot P_{AED}+P_{AED}$.

Stąd $P_{AED}=\dfrac{\frac{1}{2}ab}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\dfrac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zauważenie, że trójkąty *AED* i *BEA* są podobne i zapisanie stosunku ich pól w zależności od skali ich podobieństwa: $\frac{P_{BEA}}{P_{AED}}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie pola trójkąta *ABD* i zapisanie go jako sumy pól trójkątów *BEA* i *AED*.

<u>Uwaga</u>

Rozwiązanie możemy zakwalifikować do tej kategorii tylko pod warunkiem, że skala podobieństwa trójkątów *BEA* i *AED* została zapisana w zależności od *a* i *b*.

Rozwiązanie zadania prawie do końca .... 4 pkt

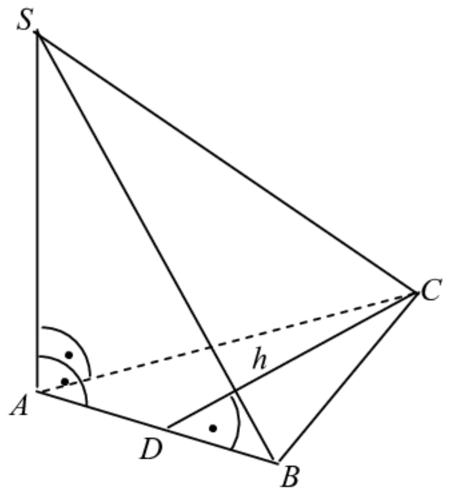
Zapisanie równania z niewiadomą P_{AED}: $\frac{1}{2}ab=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot P_{AED}+P_{AED}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie pola trójkąta *AED*: $P_{AED}=\dfrac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

Zadanie 10. (0–5)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b)



Rozwiązanie

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BAS, obliczamy długość boku AB:

$|AB| = \sqrt{118^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 22$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CAS, obliczamy długość boku AC:

$|AC| = \sqrt{131^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 61$.

Stąd wynika, że $|BC| = 61$, ponieważ nie istnieje trójkąt o długościach boków 22, 22, 61 (nierówność trójkąta).

Trójkąt ABC jest równoramienny, wówczas wysokość h opuszczona na bok AB jest równa:

$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60$.

Obliczamy pole P trójkąta ABC: $P = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 = 660$.

Obliczamy objętość V ostrosłupa $ABCS$: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot 660 \cdot 8\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości boku AB: $|AB| = 22$ albo obliczenie długości boku AC: $|AC| = 61$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 pkt

Obliczenie długości boku AB: $|AB| = 22$ i długości boku AC: $|AC| = 61$ oraz zauważenie, że długość boku BC jest równa 61.

Uwaga

Jeśli zdający obliczy $|AB|$ oraz $|AC|$ i nie zapisze (zauważy), że $|BC| = 61$, to przyznajemy **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P = 660$.
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt
Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 1760\sqrt{210}$.

Uwaga
Jeśli zdający nie zauważy, że trójkąt o bokach 22, 22, 61 nie istnieje i obliczy dwie „możliwe” objętości ostrosłupów, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 11. (0–3)

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d)

I sposób rozwiązania.
Zdarzenia $A \cap B'$ oraz $A' \cap B$ są rozłączne.
Stąd i z faktu, że $P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) \le 1$ wynika, że
$1 \ge P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right)$, czyli $P\left(A' \cap B\right) \le 0{,}3$.

Uwaga
Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt
Zdający zauważy, że zdarzenia $A \cap B'$ oraz $A' \cap B$ są rozłączne.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zdający zapisze, że $1 \ge P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right)$.
Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga
Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.

II sposób rozwiązania.
Wiemy, że $\left(A \cap B'\right) \subset B'$, stąd $P\left(A \cap B'\right) \le P\left(B'\right)$, czyli $P\left(A \cap B'\right) \le 1 - P\left(B\right)$.

Zatem $P\left(B\right) \le 0{,}3$.

Wiemy, że $\left(A' \cap B\right) \subset B$, stąd mamy $P\left(A' \cap B\right) \le P\left(B\right)$, czyli $P\left(A' \cap B\right) \le 0{,}3$, co kończy dowód.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zapisanie, że $(A \cap B') \subset B'$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...2 pkt

Zapisanie, że $(A' \cap B) \subset B$ oraz, że $P(B) \leq 0,3$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z pozostałych zapisów.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zapisanie wniosku: $P(A' \cap B) \leq 0,3$.