Materiały diagnostyczne z matematyki
poziom podstawowy

czerwiec 2012

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotowała **Agata Siwik** we współpracy z nauczycielami matematyki szkół ponadgimnazjalnych:

Ewa Ziętek
Nauczyciel II Liceum Ogólnokształcącego im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie
Irena Jakóbowska
Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Elżbieta Guziejko
Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku
Ewa Olszewska
Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku
Andrzej Gołota
Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Mechanicznych w Elblągu
Konsultant ds. matematyki Warmińsko-Mazurskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Elblągu
Jan Żukowski
Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej w Suwałkach
Doradca metodyczny Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Ustawicznego w Suwałkach

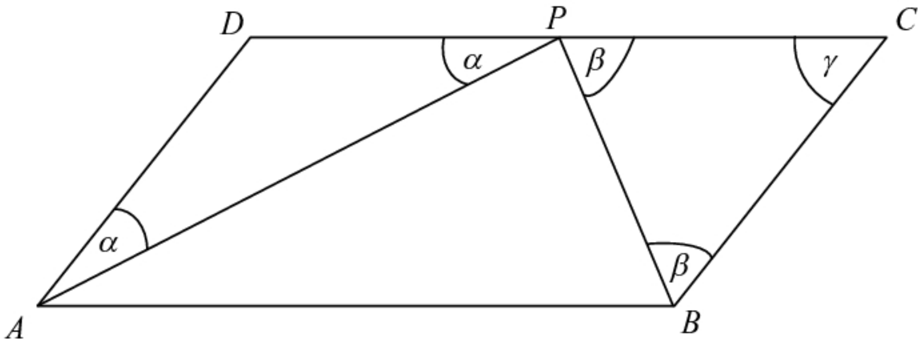
Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowiedź	C	D	B	D	B	A	B	A	C	A	D	C	D

Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 14. (*2 pkt*)
Dany jest równoległobok *ABCD*, w którym bok *BC* jest dwa razy krótszy od boku *AB*. Punkt *P* jest środkiem boku *DC*. Punkt *P* połączono z wierzchołkami *A* i *B* tego równoległoboku. Wykaż, że kąt *APB* jest kątem prostym.

I sposób rozwiązania
Rysujemy równoległobok *ABCD* i wprowadzamy oznaczenia, np.:, $|BC| = a$, $|AB| = 2a$, punkt *P* jest środkiem boku *DC*, $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPA| = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| = \beta$ i $|\sphericalangle BCD| = \gamma$.



$|BC| = a$, $|AB| = 2a$, stąd $|AD| = |DP| = |PC| = a$.
$|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPA| = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPC| = \beta$ i $|\sphericalangle BCD| = \gamma$, stąd $|\sphericalangle ADC| = 180° - \gamma$.
Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest równa $180°$, zatem otrzymujemy następujące równości:
w $\triangle ADP$: $2\alpha + 180° - \gamma = 180°$, stąd $2\alpha = \gamma$.
w $\triangle BCP$: $2\beta + \gamma = 180°$, stąd $2\beta + 2\alpha = 180°$, zatem $\alpha + \beta = 90°$.

$|\sphericalangle DPA| + |\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPB| = 180°$, stąd $\alpha + |\sphericalangle APB| + \beta = 180°$.
$\alpha + |\sphericalangle APB| + \beta = 180°$ i $\alpha + \beta = 90°$, zatem $|\sphericalangle APB| = 90°$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 p.
gdy:

- zauważy, że trójkąty: APD oraz BCP są równoramienne i kąty przy podstawie tych trójkątów są równe i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

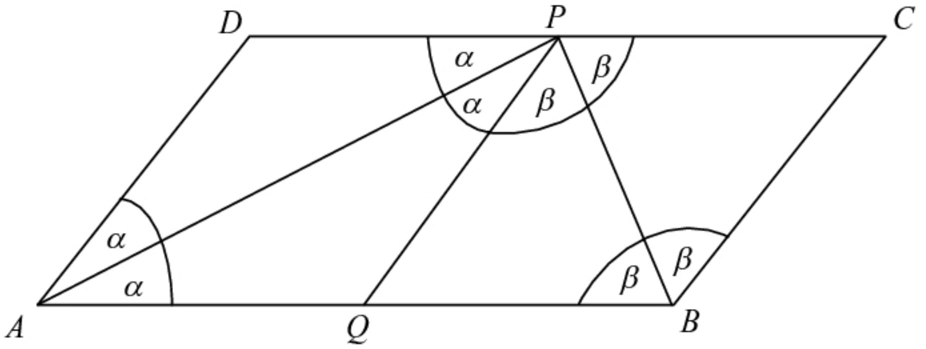
- zauważy, że trójkąty: ADP oraz BCP są równoramienne i zauważy, że suma miar kątów wewnętrznych w tych trójkątach jest równa $180°$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………...….....2 p.
gdy:

- uzasadni, że kąt APB jest kątem prostym.

II sposób rozwiązania

Rysujemy równoległobok $ABCD$ i wprowadzamy oznaczenia, np.:, $|BC| = a$, $|AB| = 2a$, punkt P jest środkiem boku DC, punkt Q jest środkiem boku AB, $|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$, i $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$.



Zauważmy, że czworokąty $AQPD$ oraz $QBCP$ są rombami, w których przekątne AP i BP są dwusiecznymi kątów odpowiednio DPQ oraz CPQ .

$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 180°$, stąd $2\alpha + 2\beta = 180°$, zatem $\alpha + \beta = 90°$.
$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APQ| + |\sphericalangle QPB|$, stąd $\alpha + \beta = 90°$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 p.
gdy:

- zauważy, że czworokąty $AQPD$ oraz $QBCP$ są rombami, w których przekątne AP i BP są dwusiecznymi kątów odpowiednio DPQ oraz CPQ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………...….....2 p.
gdy:

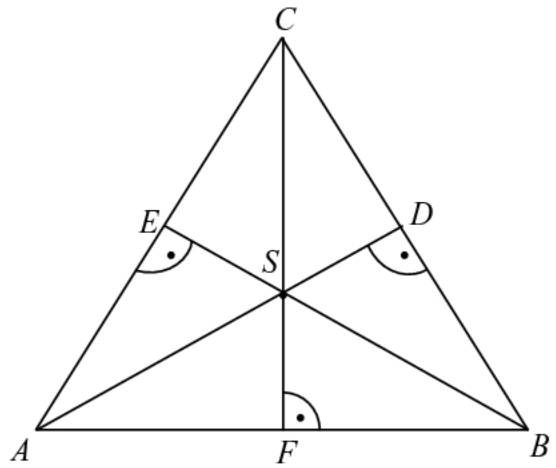
- wykorzysta zależność $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC| = 180°$ i uzasadni, że kąt APB jest kątem prostym.

Zadanie 15. (*2 pkt*)

Pole trójkąta równobocznego jest równe $18\sqrt{3}$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Niech punkty A, B i C będą wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Wówczas $|AB| = |BC| = |AC| = a$ i $|AD| = |BE| = |CF| = h$.



Korzystamy z własności trójkąta równobocznego i zapisujemy : $P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$, zatem $a^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$, stąd $a = 6\sqrt{2}$.

Zauważamy, że punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i $|AS| = |BS| = |CS| = R$, stąd $R = |AS| = \frac{2}{3}|AD|$, gdzie $|AD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Obliczamy promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole koła opisanego na tym trójkącie: $P = \pi R^2 = \pi\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24\pi$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- obliczy długość boku trójkąta równobocznego: $a = 6\sqrt{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy długość boku trójkąta równobocznego z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole okręgu opisanego na tym trójkącie.

Uwaga

Zdający może przedstawić wynik w postaci $a = \sqrt{72}$ lub $a = 3\sqrt{8}$ lub $a = 2\sqrt{18}$.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 p.
gdy:
obliczy pole koła opisanego na tym trójkącie: $P = 24\pi$.

Uwaga

Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający stosuje poprawne przybliżenia liczb π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$.

Zadanie 16. (*2 pkt*)
W trójkącie prostokątnym cosinus kąta ostrego jest trzy razy większy od sinusa tego samego kąta. Oblicz sinus tego kąta.

I sposób rozwiązania
Zapisujemy zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:
$\cos\alpha = 3\sin\alpha$.
Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy:

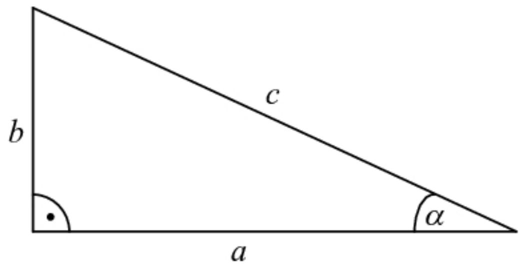
$$\sin^2\alpha + (3\sin\alpha)^2 = 1$$

$$10\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

II sposób rozwiązania
Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:



Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
Zapisujemy zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:
wynikającą z treści zadania: $\frac{b}{c} = 3\frac{a}{c}$. Stąd $b = 3a$.
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $a^2 + b^2 = c^2$, stąd
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a$.
Zatem $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 p.
gdy:

- zapisze zależność między cosinusem i sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym: $\cos\alpha = 3\sin\alpha$, skorzysta z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, zapisze $\sin^2\alpha + (3\sin\alpha)^2 = 1$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- zapisze przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego w zależności od jednej z przyprostokątnych, np.: $c = \sqrt{a^2 + (3a)^2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 p. gdy:

obliczy sinus kąta: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

__**Uwagi**__

1. Jeżeli zdający, rozwiązując równanie $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$ nie odrzuci rozwiązania: $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, to otrzymuje za całe zadanie **1punkt.**
2. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający stosuje poprawne przybliżenie liczby $\sqrt{10}$.

Zadanie 17. (*2 pkt*)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (a_n) oraz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Obliczamy dziesiąty wyraz ciągu (a_n): $a_{10} = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 8\cdot\frac{1}{512} = \frac{1}{64}$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 8$.

Obliczamy iloraz ciągu (a_n): $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2}$.

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_5 = 8\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = 8\cdot\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = 16\cdot\frac{31}{32} = 15\frac{1}{2}.$$

Uwaga

Zdający może obliczyć sumę ciągu geometrycznego wykorzystując wzór:

$$S_5 = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 + a_1\cdot q^4 = 8\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) =$$

$$= 8\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

lub

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, gdzie $a_1 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8$, $a_2 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4$, $a_3 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$, $a_4 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$, $a_5 = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- obliczy $a_{10} = \frac{1}{64}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy $a_1 = 8$ i obliczy iloraz ciągu (a_n): $q = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy,

albo

- obliczy $a_1 = 8$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje …………………………………………………………..….........2 p. gdy:

- obliczy dziesiąty wyraz ciągu (a_n): $a_{10} = \frac{1}{64}$ oraz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu: $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszego wyrazu lub ilorazu tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 18. (*4 pkt*)
Punkty $A=(-4,5)$ i $B=(4,1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt $M=(3,5)$ jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta. Znajdź równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AM: $a_{AM}=\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\dfrac{5-5}{3+4}=0$.

Prosta BC jest prostopadła do prostej AM. Wyznaczamy równanie prostej BC: $x=0$.

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BM: $a_{BM}=\dfrac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\dfrac{5-1}{3-4}=-4$.

Prosta AC jest prostopadła do prostej BM, stąd jej równanie ma postać: $y-5=\frac{1}{4}(x+4)$, po przekształceniu prosta AC ma równanie: $y=\frac{1}{4}x+6$.

Uwaga

Zdający może zauważyć, że punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$ i zapisać, że prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x=4$.

II sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{BM}=[-1,4]$.

Równanie prostych prostopadłych do tego wektora ma postać: $-x+4y+C=0$. Wybieramy prostą przechodzącą przez punkt A, stąd $4+20+C=0$, zatem $C=-24$.

Równanie prostej AC ma postać: $-x+4y-24=0$, po przekształceniu otrzymujemy $y=\frac{1}{4}x+6$.

Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AM}=[7,0]$.

Równanie prostych prostopadłych do tego wektora ma postać: $7x+D=0$. Wybieramy prostą przechodzącą przez punkt B, stąd $28+D=0$, więc $D=-28$.

Równanie prostej BC ma postać: $7x-28=0$, po przekształceniu otrzymujemy $x=4$.

Uwaga

Równanie prostej BC możemy wyznaczyć bezpośrednio korzystając z treści zadania.

Punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$, więc prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x=4$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej BM: $a_{BM} = -4$,

albo

- zapisanie równania prostej AM: $y = 5$,

albo

- obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{BM} = [-1, 4]$,

albo

- obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{AM} = [7, 0]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej BM: $a_{BM} = -4$ i zapisanie równania prostej AM: $y = 5$,

albo

- obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{BM} = [-1, 4]$ i wektora $\overrightarrow{AM} = [7, 0]$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC: $a_{AC} = \frac{1}{4}$ i zauważenie, że prosta BC jest równoległa do osi Oy i zapisanie równania prostej: $x = 4$,

albo

- zapisanie równania prostych prostopadłych do wektora $\overrightarrow{BM}$: $-x + 4y + C = 0$ i zapisanie równania prostych prostopadłych do wektora $\overrightarrow{AM}$: $7x + C_1 = 0$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

wyznaczenie równania prostej AC: $y = \frac{1}{4}x + 6$ i równania prostej BC: $x = 4$.

III sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB: $a_{AB}=\frac{1-5}{4+4}=-\frac{1}{2}$. Prosta AB jest prostopadła do prostej CM, zatem jej równanie ma postać: $y-5=2(x-3)$. Po przekształceniu otrzymujemy: $y=2x-1$.

Z treści zadania wynika, że punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$, więc prosta BC prostopadła do prostej AM ma postać $x=4$.

Proste BC i CM przecinają się w punkcie C. Rozwiązujemy układ $\begin{cases} y=2x-1 \\ x=4 \end{cases}$ i otrzymujemy współrzędne punktu C: $C=(4,7)$. Wyznaczamy równanie prostej BC: $y-7=\frac{7-5}{4+4}(x-4)$.

Po przekształceniu otrzymujemy $y=\frac{1}{4}x+6$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania...1 p.

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=-\frac{1}{2}$ i zauważenie, że punkty A oraz M leżą na prostej $y=5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 p.

Wyznaczenie równania prostej CM: $y=2x-1$ oraz równania prostej BC: $x=4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 p.

Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C=(4,7)$.

Rozwiązanie pełne ....4 p.

Wyznaczenie równania prostej AC: $y=\frac{1}{4}x+6$ i równania prostej BC: $x=4$.

Zadanie 19. (*5 pkt*)
Z dwóch miejscowości A i B oddalonych od siebie o 28km wyjechali rowerami naprzeciw siebie Kasia i Tomek. Kasia wyruszyła 20 minut wcześniej niż Tomek i jechała z prędkością o $7\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą od prędkości z jaką jechał Tomek. Spotkali się w połowie drogi. Oblicz z jakimi średnimi prędkościami jechali do miejsca spotkania.

Uwaga
W zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v, t oznaczających odpowiednio, prędkość i czas. Nie wymagamy, by niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

I sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Kasi, v – średnia prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Tomka:
$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$$
Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:
$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$$
$$14+\frac{98}{v}-\frac{1}{3}v-\frac{7}{3}=14$$
$$v^2+7v-294=0$$
$$\Delta=49+1176=35^2$$
$$v_1=\frac{-7-35}{2}=-21\ ,\quad v_2=\frac{-7+35}{2}=14$$
v_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v+7=14+7=21\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

II sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Tomka, v – średnia prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Kasi:
$$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$$

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$

$14-\frac{98}{v}+\frac{1}{3}v-\frac{7}{3}=14$

$v^2-7t-294=0$

$\Delta=49+1176=35^2$

$v_1=\frac{7-35}{2}=-14$, $v_2=\frac{7+35}{2}=21$

v_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v-7=21-7=14\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$, gdzie t oznacza czas jazdy Kasi, a v średnią prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę,

lub

$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$, gdzie t oznacza czas jazdy Tomka, a v średnią prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t, np.:

$\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14 \end{cases}$ lub $\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14 \end{cases}$

<u>Uwaga</u>
Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą v, np.:
$\left(\frac{14}{v}-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$ lub $\frac{98}{v}-\frac{1}{3}v-\frac{7}{3}=0$ lub $\left(\frac{14}{v}+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$ lub
$-\frac{98}{v}+\frac{1}{3}v-\frac{7}{3}=0$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki .... **2 p.**

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą v (prędkość jazdy Kasi) z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średniej prędkości z jaką jechał Tomek,

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą v (prędkość jazdy Tomka) z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średniej prędkości z jaką jechała Kasia.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**
Obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek: $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Kasi, v – średnia prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Tomka:
$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$$
Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:
$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$$
$$14+7t-\frac{14}{3t}-\frac{7}{3}=14$$
$$21t^2-7t-14=0$$
$$3t^2-t-2=0$$
$$\Delta=1+24=5^2$$
$$t_1=\frac{1-5}{6}=-\frac{2}{3}, \qquad t_2=\frac{1+5}{6}=1$$
t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v=\frac{14}{1}=14\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v+7=14+7=21\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

IV sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas jazdy Tomka, v – średnia prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla Kasi:

$$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$$

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$$

$$14-7t+\frac{14}{3t}-\frac{7}{3}=14$$

$$21t^2+7t-14=0$$

$$3t^2+t-2=0$$

$$\Delta=1+24=5^2$$

$$t_1=\frac{-1-5}{6}=-1\ , \qquad t_2=\frac{-1+5}{6}=\frac{2}{3}$$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechał Tomek: $v=\frac{14}{\frac{2}{3}}=21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Obliczamy średnią prędkość z jaką jechała Kasia: $v-7=21-7=14\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Odp. Średnia prędkość z jaką jechała Kasia jest równa $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a średnia prędkość z jaką jechał Tomek jest równa $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 p.**

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14$, gdzie t oznacza czas jazdy Kasi, a v średnią prędkość jazdy Kasi w kilometrach na godzinę.

lub

$\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14$, gdzie t oznacza czas jazdy Tomka, a v średnią prędkość jazdy Tomka w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$\begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot(v+7)=14 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t\cdot v=14 \\ \left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot(v-7)=14 \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą t, np.:

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{14}{t}+7\right)=14 \text{ lub } 7t-\frac{14}{3t}-\frac{7}{3}=0 \text{ lub } \left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{14}{t}-7\right)=14 \text{ lub } -7t+\frac{14}{3t}-\frac{7}{3}=0$$

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki .... **2 p.**

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek,

albo

- obliczenie czasu jazdy Kasi: $t=1$ i nie obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek,

albo

- obliczenie czasu jazdy Tomka: $t=\frac{2}{3}$ i nie obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Obliczenie średnich prędkości z jakimi jechali Kasia i Tomek: $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $21\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, np. zapisze równanie $(t-20)(v+7)=14$, to otrzymuje **0 punktów.**
2. Jeżeli zdający odgadnie średnią prędkość jazdy Kasi i Tomka i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt.**