Pobrano z arkusze24.pl

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
Schemat oceniania

Poziom Podstawowy

Pobrano z arkusze24.pl

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	A	C	A	A	D	B	A	A	C	A	B	D	D	C	D	C	C	C	C	B	C	A	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 24. (2 punkty)
Rozwiąż nierówność $x^2-3x+2<0$.

I sposób rozwiązania

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:
  $\Delta=1 \qquad x_1=\frac{3-1}{2}=1 \quad x_2=\frac{3+1}{2}=2$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1+x_2=3$ oraz $x_1\cdot x_2=2$ i stąd $x_1=1$, $x_2=2$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x-1)(x-2)<0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
  - korzystając z postaci kanonicznej $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)$
  - podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi

albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1=1$, $x_2=2$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $1<x<2$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $(1,2)$ lub $x\in(1,2)$ lub $1<x<2$

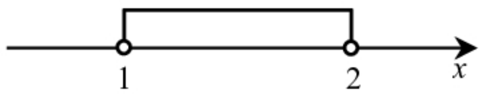
albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x>1$, $x<2$

Pobrano z arkusze24.pl

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



II sposób rozwiązania

Zapisujemy nierówność w postaci

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}<0$, a następnie $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$, a stąd $\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$, więc $1<x<2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

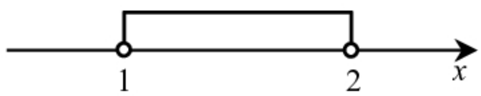
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $(1,2)$ lub $x\in(1,2)$ lub $1<x<2$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x>1$, $x<2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Uwagi

- Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x=1$, $x=2$ i zapisze np.: $x\in(-1,2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.
- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. zapisze $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{-2}$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{-2}$, $x\in\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{-2},\frac{-3-\sqrt{17}}{-2}\right)$.
- Przyznajemy **1 punkt** zdającemu, który popełnił jeden błąd przy przepisywaniu nierówności (pisząc np. $x^2+3x+2<0$, $x^2-3x+2>0$), o ile trójmian z lewej strony nierówności ma dwa różne pierwiastki i zdający rozwiąże konsekwentnie nierówność do końca.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 25. (2 punkty)
Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 16, czyli $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 16$, jest podzielny przez 2^{15}.

I sposób rozwiązania

Wystarczy obliczyć liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $16!$.
Co druga liczba całkowita jest podzielna przez 2, więc mamy 8 dwójek.
Co czwarta liczba całkowita jest podzielna przez 4, więc mamy następne 4 dwójki.
Co ósma liczba całkowita jest podzielna przez 8, więc mamy następne 2 dwójki.
W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 16 jest jeszcze 1 dwójka.
Łącznie w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 16! mamy $8+4+2+1=15$ dwójek, czyli liczba ta jest podzielna przez 2^{15}.

II sposób rozwiązania

Liczbę 16! możemy zapisać w postaci:
$$2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot (2\cdot 3)\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot (2\cdot 5)\cdot 11\cdot \left(3\cdot 2^2\right)\cdot 13\cdot (2\cdot 7)\cdot (3\cdot 5)\cdot 2^4 = 2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze 16! w postaci $2\cdot 3\cdot \left(2^2\right)\cdot 5\cdot (2\cdot 3)\cdot 7\cdot 2^3\cdot 9\cdot (2\cdot 5)\cdot 11\cdot \left(2^2\cdot 3\right)\cdot 13\cdot (2\cdot 7)\cdot 15\cdot \left(2^4\right)$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy (np. źle zliczy liczbę czynników 2).

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Zadanie 26. (2 punkty)
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3+2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

I sposób rozwiązania

Najpierw obliczamy $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Stąd $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, bo α jest kątem ostrym.

Zatem $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}$ i stąd $3+2\mathrm{tg}^2\alpha = 3+2\cdot\frac{1}{15} = \frac{47}{15}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy obliczy $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

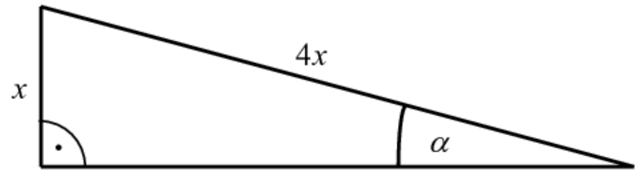
gdy obliczy wartość wyrażenia $3+2\mathrm{tg}^2\alpha$ i zapisze wynik w postaci: $3+2\cdot\frac{1}{15}$, $3\frac{2}{15}$ lub $\frac{47}{15}$.

Pobrano z arkusze24.pl

II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy przyprostokątną x i przeciwprostokątną $4x$ oraz zaznaczamy kąt ostry α tak, aby $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

Uwaga: Zdający może oznaczyć długości odpowiednich boków liczbami 1 oraz 4.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość drugiej przyprostokątnej: $x\sqrt{15}$.

Obliczamy wartości funkcji $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Stąd $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{47}{15}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie wyznaczy długość drugiej przyprostokątnej: $x\sqrt{15}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$ i zapisze wynik w postaci: $3 + 2\cdot\frac{1}{15}$, $3\frac{2}{15}$ lub $\frac{47}{15}$.

Uwaga:

Akceptujemy sytuację, w której zdający odczytuje przybliżoną wartość $\operatorname{tg}\alpha$ (na podstawie wartości $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ zdający może przyjąć $\operatorname{tg}\alpha \approx \operatorname{tg}14° \approx 0,2493$ albo $\operatorname{tg}\alpha \approx \operatorname{tg}15° \approx 0,2679$, może również przyjąć przybliżenie z mniejszą dokładnością, ale nie mniejszą niż do jednego miejsca po przecinku) i na tej podstawie obliczyć wartość wyrażenia $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$ stosując poprawnie regułę zaokrąglania.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 27. (2 punkty)
Liczby $2x+1$, 6, $16x+2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że drugi wyraz ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazu pierwszego i wyrazu trzeciego. A zatem $\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2}=6$, stąd $x=\frac{1}{2}$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze równanie wynikające z własności lub z definicji ciągu arytmetycznego np.:

$$\frac{(2x+1)+(16x+2)}{2}=6 \quad \text{lub} \quad 6-(2x+1)=(16x+2)-6 .$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy $x=\frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases}$$

Stąd $x=\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze układ równań, np.:

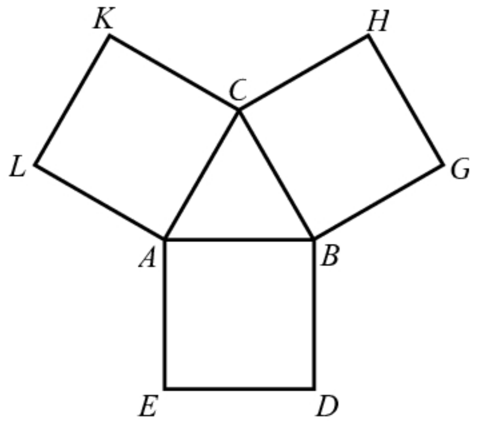
$$\begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 2x+1+2r=16x+2 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} 2x+1+r=6 \\ 6+r=16x+2 \end{cases}.$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

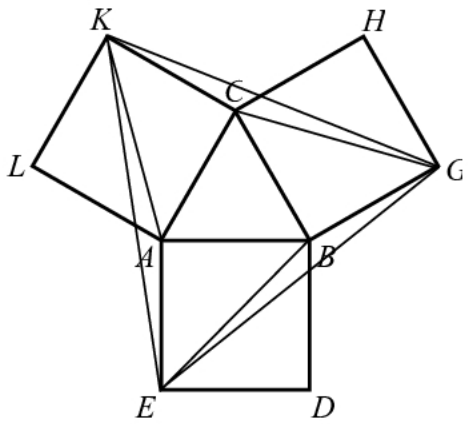
gdy obliczy $x=\frac{1}{2}$.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 28. (2 punkty)
Na bokach trójkąta równobocznego ABC (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty $ABDE$, $BGHC$ i $ACKL$. Udowodnij, że trójkąt KGE jest równoboczny.



Rozwiązanie:



Rysujemy odcinki KG, CG, GE, BE, KE i KA.

- Odcinki KC, GB i AE są bokami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta równobocznego, więc $|KC| = |GB| = |AE|$.
- Odcinki CG, BE i AK są przekątnymi tych kwadratów, więc $|CG| = |BE| = |AK|$.
- $|\sphericalangle GCK| = 360° - (|\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG|) = 360° - 90° - 60° - 45° = 165°$.

  Analogicznie dowodzimy, że $|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle EAK| = 165°$.
- Korzystając z cechy *(bok, kąt, bok)* przystawania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty KCG, GBE i AEK są przystające, więc $|KG| = |GE| = |EK|$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zapisze, że trójkąty KCG, GBE i AEK są przystające i wyciągnie wniosek, że $|KG| = |GE| = |EK|$, lecz nie poda pełnego uzasadnienia równości odpowiednich kątów lub boków.

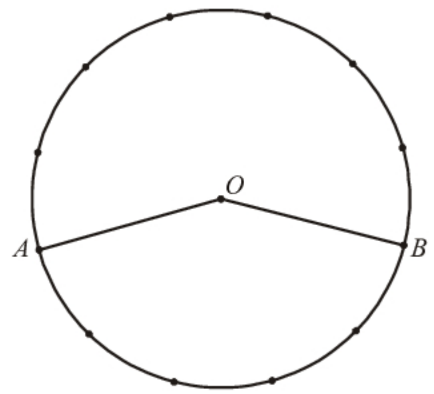
Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 29. (2 punkty)
Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7:5. Jaka jest miara kąta środkowego opartego na krótszym łuku?

<u>Rozwiązanie</u>



Krótszy łuk to $\frac{5}{12}$ okręgu, zatem kąt środkowy oparty na tym łuku to $\frac{5}{12}$ kąta pełnego, tj. $\frac{5}{12} \cdot 360^\circ = 150^\circ$.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- zapisze, że krótszy łuk AB to $\frac{5}{12}$ okręgu

lub

- zapisze układ równań, np.: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ i $\alpha + \beta = 360^\circ$

lub

- zapisze, że dwa kolejne punkty zaznaczone na tym okręgu wraz z punktem O wyznaczają kąt środkowy o mierze 30°

lub

- zapisze, że kąt środkowy oparty na dłuższym z łuków AB ma miarę 210°

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy miarę kąta środkowego opartego na krótszym z łuków AB: $|\sphericalangle AOB| = 150^\circ$.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 30. (2 punkty)

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy niż numer kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

<u>I sposób rozwiązania</u> (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary liczb (a,b), gdzie $a,b \in \{1,2,...,10\}$. Jest to model klasyczny.

$|\Omega| = 10 \cdot 10$

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim.

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 1, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 2 do 10. (Mamy więc 9 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 2, to na drugim miejscu może być każda z liczb od 3 do 10. (Mamy więc 8 możliwości).

Jeżeli na pierwszym miejscu jest liczba 3, to na drugim może być każda z liczb od 4 do 10. (Mamy więc 7 możliwości). itd.

Zatem $|A| = 9+8+7+...+1 = 45$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda tabeli)

Wszystkie zdarzenia elementarne możemy wypisać w postaci kwadratowej tablicy.

(1,1)	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	**(1,6)**	**(1,7)**	**(1,8)**	**(1,9)**	**(1,10)**
(2,1)	(2,2)	**(2,3)**	**(2,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**	**(2,7)**	**(2,8)**	**(2,9)**	**(2,10)**
(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	**(3,5)**	**(3,6)**	**(3,7)**	**(3,8)**	**(3,9)**	**(3,10)**
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	**(4,5)**	**(4,6)**	**(4,7)**	**(4,8)**	**(4,9)**	**(4,10)**
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	**(5,6)**	**(5,7)**	**(5,8)**	**(5,9)**	**(5,10)**
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	**(6,7)**	**(6,8)**	**(6,9)**	**(6,10)**
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	**(7,8)**	**(7,9)**	**(7,10)**
(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	**(8,9)**	**(8,10)**
(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)	**(9,10)**
(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)	(10,6)	(10,7)	(10,8)	(10,9)	(10,10)

Pobrano z arkusze24.pl

albo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
2			**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
3				**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
4					**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
5						**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
6							**X**	**X**	**X**	**X**
7								**X**	**X**	**X**
8									**X**	**X**
9										**X**
10										

Stąd $|\Omega| = 10 \cdot 10$.
Jest to model klasyczny.
Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu A są pary liczb, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na miejscu drugim. Są to wszystkie pary liczb wyróżnione w pierwszej tablicy lub zaznaczone w drugiej. Jest ich 45. Zatem $P(A) = 0,45$.

Uwaga:
Wszystkich par w tej tablicy jest 10^2, na przekątnej łączącej pary $(1,1)$ i $(10,10)$ jest ich 10, więc pozostałych par jest $10^2 - 10$. Nad przekątną jest tyle samo par co pod nią, więc par, w których na pierwszym miejscu jest liczba mniejsza niż na drugim jest $\frac{10^2 - 10}{2}$.

Zatem $P(A) = 0,45$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy obliczy $|\Omega| = 10 \cdot 10$ albo $|A| = 45$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = 0,45 = \frac{9}{20}$.

Uwaga:

- Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 31. (5 punktów)
Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość boiska w pierwszej szkole przez a i szerokość przez b.
Wówczas w drugiej szkole długość boiska jest równa $a+4$, szerokość $b-8$.
Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ (a+4)^2+(b-8)^2=65^2 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci

$$\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ a^2+8a+16+b^2-16b+64=65^2 \end{cases}$$

a następnie

$$\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ a^2+b^2+8a-16b+80=65^2 \end{cases}$$

skąd otrzymujemy układ

$$\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ 8a-16b+80=0 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ a=2b-10 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczoną wartość a do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie kwadratowe $(2b-10)^2+b^2=65^2$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy: $b^2-8b-825=0$, $\Delta=3364$, $\sqrt{\Delta}=58$
Rozwiązaniami tego równania są liczby $b=33$ oraz $b=-25$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie i obliczamy $a=56$.
Zatem boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, a więc boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie jednego z równań $a^2+b^2=65^2$ lub $(a+4)^2+(b-8)^2=65^2$

Pobrano z arkusze24.pl

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi *a* i *b*, np.: $\begin{cases} a^2+b^2=65^2 \\ (a+4)^2+(b-8)^2=65^2 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą *a* lub *b* w postaci: $(2b-10)^2+b^2=65^2$ lub

$b^2-8b-825=0$ lub $a^2+\left(\frac{1}{2}a+5\right)=65^2$ lub $\frac{1}{4}a^2+a-840=0$.

Uwaga:
Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania zadania (np. błędy rachunkowe)... 4 pkt

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy wymiary boiska w drugiej szkole

albo

- zdający obliczy wymiary boiska w pierwszej szkole z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy wymiary boiska w drugiej szkole.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie wymiarów boisk w obu szkołach:
Boisko w pierwszej szkole ma 33 m szerokości i 56 metrów długości, natomiast boisko w drugiej szkole ma 25 m szerokości i 60 m długości.

Uwaga:
Jeśli zdający odgadnie poprawne wymiary boisk, to otrzymuje **1 punkt**.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 32. (4 punkty)
Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:
(1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
(2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
(3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
(4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

Rozwiązanie

Trzy ostatnie cyfry są parzyste i uporządkowane malejąco. Mamy więc 10 możliwości ustawienia tych cyfr tak, by spełnione były warunki (1), (2) i (3):

_ _ 4 2 0
_ _ 6 2 0
_ _ 8 2 0
_ _ 6 4 0
_ _ 8 4 0
_ _ 8 6 0
_ _ 6 4 2
_ _ 8 4 2
_ _ 8 6 2
_ _ 8 6 4

Pierwszą cyfrą liczby może być dowolna spośród cyfr: 1, 2,…, 8, a drugą dowolna spośród cyfr: 0,1,2,…,8.
Mamy więc $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ możliwości utworzenia liczb spełniających podane warunki.
Uwaga: Trzy wybrane cyfry parzyste można ustawić w porządku malejącym dokładnie na jeden sposób. Tak więc liczba tych możliwych jest równa $\binom{5}{3} = 10$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu

- liczby możliwości ustawienia trzech cyfr parzystych spełniających warunki (1), (2) i (3); tych możliwości jest 10.

- liczby możliwości wyboru pierwszej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 8.

- liczby możliwości wyboru drugiej cyfry liczby pięciocyfrowej; tych możliwości jest 9.

Za obliczenie każdej z tych liczb, zdający otrzymuje 1 punkt.

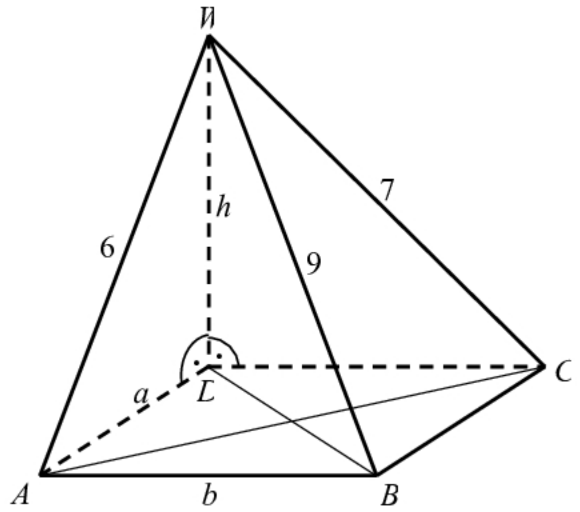
Drugi etap polega na wykorzystaniu reguły mnożenia i stwierdzeniu, że liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie warunki (1), (2), (3) i (4) jest 720. Za tę część zdający otrzymuje 1 punkt.

Pobrano z arkusze24.pl

Zadanie 33. (4 punkty)

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW, BW i CW mają następujące długości: $|AW| = 6$, $|BW| = 9$, $|CW| = 7$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

I sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa $|AD| = a$, $|AB| = b$ i $|DW| = h$.

Trójkąty BAW i BCW są prostokątne, więc korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równania $a^2 + 49 = 81$ i $b^2 + 36 = 81$.

Stąd otrzymujemy $a = 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3\sqrt{5}$.

Wysokość ostrosłupa obliczymy korzystając z twierdzenia Pitagorasa np. dla trójkąta ADW.

$h = \sqrt{6^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 32} = 2$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Wykorzystanie faktu, że trójkąty BAW i BCW są prostokątne i **zapisanie przynajmniej jednego równania**, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa, np.: $a^2 + 49 = 81$ albo $b^2 + 36 = 81$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości obu krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 4\sqrt{2}$ i $b = 3\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

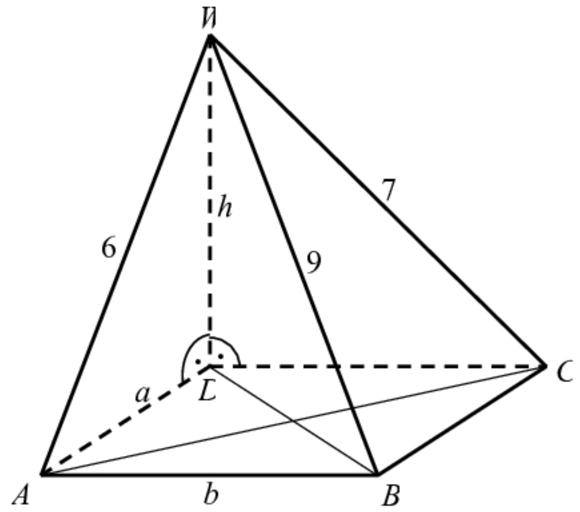
Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa: $h = 2$, $a = 4\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 8\sqrt{10}$.

Pobrano z arkusze24.pl

II sposób rozwiązania



Oznaczmy długości krawędzi ostrosłupa $|AD| = a$, $|AB| = b$ i $|DW| = h$.

Trójkąty *ADW*, *CDW*, *BDW* i *BAD* są prostokątne, więc korzystając czterokrotnie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}$$

Dodajemy pierwsze i drugie równania stronami i podstawiamy $a^2 + b^2 = 85 - 2h^2$ do trzeciego równania. Otrzymamy $h^2 = 4$, więc $h = 2$.

Podstawiając $h = 2$ do pozostałych równań, obliczamy $a = 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3\sqrt{5}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie układu równań, z którego można obliczyć długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa, np.: $\begin{cases} a^2 + h^2 = 36 \\ b^2 + h^2 = 49 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie z powyższego układu jednej z niewiadomych, np.: $h = 2$ albo $a = 4\sqrt{2}$ albo $b = 3\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie długości wszystkich odcinków potrzebnych do obliczenia objętości ostrosłupa: $h = 2$, $a = 4\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$.

Pobrano z arkusze24.pl

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 8\sqrt{10}$.

Uwaga:

Jeśli zdający błędnie zaznaczy na rysunku długości krawędzi (zamieni 9 z 6 lub 9 z 7) albo błędnie zinterpretuje treść zadania pisząc np.: $a^2 + 9^2 = 7^2$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.