Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2011

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2011

Zadanie 1. (0–4)

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie cech podzielności liczb całkowitych

<u>**Rozwiązanie**</u>

Przekształcamy wyrażenie $k^6-2k^4+k^2$ do postaci iloczynowej:

$k^2(k^4-2k^2+1)=k^2\left(k^2-1\right)^2=\left[\left(k-1\right)k(k+1)\right]^2$.

Wykazujemy, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 6.

Aby wykazać podzielność liczby rozpatrujemy jeden z trzech sposobów:

- **sposób I**

  Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Kwadrat iloczynu tych liczb jest podzielny przez 36.

  Zatem liczba postaci $k^6-2k^4+k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

- **sposób II**

  Pokazujemy podzielność przez 2 i przez 3:

  1) <u>podzielność przez 2</u>

  dla k – parzystego czyli $k=2m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, otrzymujemy $\left(k-1\right)k(k+1)=\left(2m-1\right)2m(2m+1)=2\left(2m-1\right)m(2m+1)$

  dla k – nieparzystego czyli $k=2m+1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy $\left(k-1\right)k(k+1)=2m(2m+1)\left(2m+2\right)$,

  zatem w każdym przypadku liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 2,

  2) <u>podzielność przez 3</u>

  dla $k=3m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy

  $\left(k-1\right)k(k+1)=\left(3m-1\right)3m(3m+1)=3\left(3m-1\right)m(3m+1)$

  dla $k=3m+1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy

  $\left(k-1\right)k(k+1)=3m(3m+1)\left(3m+2\right)$

  dla $k=3m+2$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy

  $\left(k-1\right)k(k+1)=(3m+1)\left(3m+2\right)\left(3m+3\right)=3(3m+1)\left(3m+2\right)\left(m+1\right)$,

  zatem w każdym przypadku liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 3.

  Ponieważ liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, a liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, więc liczba $\left(k-1\right)k(k+1)$ jest podzielna przez 6.

  Kwadrat tej liczby jest podzielny przez 36.

  Zatem liczba $k^6-2k^4+k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

- **sposób III**

  Pokazujemy podzielność przez 6 na podstawie przypadków:

  dla $k=6m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy

  $\left(k-1\right)k(k+1)=\left(6m-1\right)6m(6m+1)=6\left(6m-1\right)m(6m+1)$

  dla $k=6m+1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy

  $\left(k-1\right)k(k+1)=6m(6m+1)\left(6m+2\right)$

dla $k=6m+2$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy
$(k-1)k(k+1)=(6m+1)(6m+2)(6m+3)=6(6m+1)(3m+1)(2m+1)$
dla $k=6m+3$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy
$(k-1)k(k+1)=(6m+2)(6m+3)(6m+4)=6(3m+1)(2m+1)(6m+4)$
dla $k=6m+4$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy
$(k-1)k(k+1)=(6m+3)(6m+4)(6m+5)=6(2m+1)(3m+2)(6m+5)$
dla $k=6m+5$, gdzie m jest liczbą całkowitą, mamy
$(k-1)k(k+1)=(6m+4)(6m+5)(6m+6)=6(6m+4)(6m+5)(m+1)$,
zatem w każdym przypadku liczba $(k-1)k(k+1)$ jest podzielna przez 6.
Kwadrat tej liczby jest podzielny przez 36.
Zatem liczba $k^6-2k^4+k^2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dzieli się przez 36.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym jest postęp .... 1 pkt
Zapisanie liczby $n^2=k^6-2k^4+k^2$ w jednej z następujących postaci iloczynowych:
$k^2\left(k^2-1\right)^2$ lub $\left[k\left(k^2-1\right)\right]^2$ lub $\left[k(k-1)(k+1)\right]^2$ lub $k^2\left[(k-1)(k+1)\right]^2$ lub $\left(k^3-k\right)^2$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wykazanie podzielności liczby n przez 2 albo przez 3.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Wykazanie podzielności liczby n przez 2 i przez 3 albo stwierdzenie, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6.
Uwaga
Zdający może zauważyć, że $(k+1)k(k-1)=6\cdot\binom{k+1}{3}$. Przyznajemy wtedy **3 punkty** i nie wymagamy wyjaśnienia, że został tu użyty uogólniony współczynnik dwumianowy.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Wyciągnięcie wniosku o podzielności liczby n^2 przez 36.

Zadanie 2. (0–4)

Rozumowanie i argumentacja	Przekształcenie równoważne wyrażenia wymiernego

I sposób rozwiązania
Przekształcamy tezę w sposób równoważny.
Mnożymy obie strony równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ przez $(a-c)(b-c)$, otrzymując:
$a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$, czyli $ab-ac+ab-bc=2ab-2ac-2bc+2c^2$.
Stąd otrzymujemy $2c^2-ac-bc=0$, czyli $c(2c-a-b)=0$.
Ta ostatnia równość jest prawdziwa, bo z założenia $2c-a-b=0$. Zatem teza też jest prawdziwa.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki .... 1 pkt

Sprowadzenie lewej strony równości do wspólnego mianownika: $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Przekształcenie równości $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$ do postaci

$a(b-c)+b(a-c)=2(a-c)(b-c)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wykonanie działań i doprowadzenie równości do postaci np.: $2c^2-ac-bc=0$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Uzasadnienie, że $c(2c-a-b)=0$ i wnioskowanie o prawdziwości równości

$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=2$.

II sposób rozwiązania

Z równania $a+b=2c$ wyznaczamy $b=2c-a$ i wstawiamy do wyrażenia:

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{a-c}+\frac{2c-a}{2c-a-c}=\frac{a}{a-c}+\frac{2c-a}{c-a}=\frac{a-(2c-a)}{a-c}=\frac{2(a-c)}{a-c}=2.$$

Uwaga

Z równania $a+b=2c$ można także wyznaczyć zmienną a lub c.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki .... 1 pkt

Sprowadzenie lewej strony równości do wspólnego mianownika: $\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wyznaczenie z założenia $a+b=2c$, np. b i doprowadzenie wyrażenia do postaci

$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{a-c}+\frac{2c-a}{2c-a-c}=\frac{a}{a-c}+\frac{2c-a}{c-a}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wykonanie działań i doprowadzenie wyrażenia do postaci np.: $\frac{a-(2c-a)}{a-c}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Przekształcenie wyrażenia do postaci $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{2(a-c)}{a-c}=2$.

III sposób rozwiązania

Z równania $a+b=2c$ otrzymujemy $a-c=c-b$, więc ciąg a,c,b jest ciągiem arytmetycznym.

$c=a+r \qquad b=a+2r$

Wstawiamy do wyrażenia

$$\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{a-(a+r)}+\frac{a+2r}{a+2r-(a+r)}=\frac{a}{-r}+\frac{a+2r}{r}=\frac{-a+a+2r}{r}=\frac{2r}{r}=2$$

Uwaga
Zdający może zauważyć, że $a-c=c-b$ i przekształcić wyrażenie bez wprowadzania r, np. $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a}{c-b}+\frac{b}{b-c}=\frac{a-b}{c-b}=\frac{2c-b-b}{c-b}=\frac{2c-2b}{c-b}=2$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki .... 1 pkt
Zapisanie, że liczby a, c, b tworzą ciąg arytmetyczny.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Doprowadzenie wyrażenia do postaci, np. $\frac{a}{a-(a+r)}+\frac{a+2r}{a+2r-(a+r)}$.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Wykonanie działań i doprowadzenie wyrażenia do postaci $\frac{a}{-r}+\frac{a+2r}{r}$.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Przekształcenie wyrażenia do postaci $\frac{-a+a+2r}{r}=\frac{2r}{r}=2$.

Zadanie 3. (0–6)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków

I sposób rozwiązania
Zapisujemy warunki jakie muszą być spełnione, aby równanie
$x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$
posiadało dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$:

$$\begin{cases}\Delta>0\\(x_1-x_2)^2<8(m+1)\end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$.
$16m^2-4(-m^3+6m^2+m-2)>0$
$m^3-2m^2-m+2>0$
$(m+1)(m-1)(m-2)>0$.
Zatem $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.
Rozwiązujemy nierówność $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$, korzystając ze wzorów Viète'a.
$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<8m+8$
$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2<8m+8$
$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2<8m+8$
$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2<8m+8$. Ponieważ $x_1+x_2=4m$ oraz $x_1\cdot x_2=-m^3+6m^2+m-2$, więc
$(4m)^2-4(-m^3+6m^2+m-2)<8m+8$.
Przekształcamy tę nierówność do postaci $4m^3-8m^2-12m<0$

stąd $4m(m-3)(m+1)<0$.

Rozwiązaniem nierówności jest
$m\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$.

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych zbiorów rozwiązań nierówności:
$\Delta>0$ i $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$.

Stąd $m\in(0,1)\cup(2,3)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$: $m\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze $\Delta\ge 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za

- zapisanie wyrażenia $(x_1-x_2)^2$ w postaci $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ lub $\frac{\Delta}{a^2}$.

3 punkty zdający otrzymuje za

- zapisanie nierówności $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$ w postaci nierówności trzeciego stopnia z jedną niewiadomą *m*, np. $4m^3-8m^2-12m<0$.

4 punkty zdający otrzymuje za

- rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia: $m\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$.

Rozwiązanie pełne *(trzeci etap)*...**6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m\in(0,1)\cup(2,3)$.

Uwaga

Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.

II sposób rozwiązania

Równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2, gdy $\Delta>0$.

Obliczamy $\Delta=16m^2-4(-m^3+6m^2+m-2)=4\left(m^3-2m^2-m+2\right)$.

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$.

$m^3-2m^2-m+2>0$

$(m+1)(m-1)(m-2)>0$.

Zatem $m \in (-1,1) \cup (2,+\infty)$.

Następnie wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{4m - \sqrt{4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right)}}{2}, \quad x_2 = \frac{4m + \sqrt{4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right)}}{2}.$$

Wówczas

$$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} - \frac{4m + 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2} - 4m - 2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-4\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}}{2} = -2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}$$

i stąd

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(-2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}\right)^2 = 4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right).$$

Z warunku $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$ otrzymujemy nierówność $4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right) < 8(m+1)$.

Stąd $m^3 - 2m^2 - 3m < 0$, czyli $m\left(m^2 - 2m - 3\right) < 0$, $m\left(m+1\right)\left(m-3\right) < 0$.

Zatem $m \in (-\infty,-1) \cup (0,3)$.

Wyznaczamy część wspólną otrzymanych rozwiązań nierówności
$\Delta > 0$ i $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$: $m \in (0,1) \cup (2,3)$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-1,1) \cup (2,+\infty)$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zapisze $\Delta \ge 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego. Za poprawne rozwiązanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za

- wyznaczenie x_1 i x_2: $x_1 = \dfrac{4m - \sqrt{4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right)}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4m + \sqrt{4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right)}}{2}$.

2 punkty zdający otrzymuje za

- zapisanie $x_1 - x_2 = -2\sqrt{m^3 - 2m^2 - m + 2}$.

3 punkty zdający otrzymuje za

- obliczenie $\left(x_1 - x_2\right)^2 = 4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right)$ i zapisanie nierówności
  $4\left(m^3 - 2m^2 - m + 2\right) < 8(m+1)$.

4 punkty zdający otrzymuje za

- rozwiązanie nierówności trzeciego stopnia: $m \in \left(-\infty, -1\right) \cup \left(0, 3\right)$.

Rozwiązanie pełne *(trzeci etap)*..**6 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:
$m \in \left(0,1\right) \cup \left(2,3\right)$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapu I i etapu II, gdy co najmniej jedna nierówność (albo z etapu I, albo z etapu II) jest rozwiązana poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 4. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Wyłączamy przed nawias $2\sin^2 x$: $2\sin^2 x\left(1-\cos x\right) = 1 - \cos x$ i zapisujemy równanie w postaci iloczynowej: $2\sin^2 x\left(1-\cos x\right) - \left(1-\cos x\right) = 0$, $\left(2\sin^2 x - 1\right)\left(1-\cos x\right) = 0$.

Zatem $2\sin^2 x - 1 = 0$ lub $1 - \cos x = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = 1$
$x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$	lub	$x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$	lub	$x = 0$ lub $x = 2\pi$
albo		albo		albo
$x = 225^\circ$ lub $x = 315^\circ$		$x = 45^\circ$ lub $x = 135^\circ$		$x = 0^\circ$ lub $x = 360^\circ$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$ są:

$x = 0$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ lub $x = 2\pi$

albo

$x = 0^\circ$ lub $x = 45^\circ$ lub $x = 135^\circ$ lub $x = 225^\circ$ lub $x = 315^\circ$ lub $x = 360^\circ$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w postaci, np.

$2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x$ lub $2\sin^2 x(1-\cos x)-(1-\cos x) = 0$,

lub $\left(2\sin^2 x - 1\right) - \cos x\left(2\sin^2 x - 1\right) = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$
- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lub $\cos x = 1$
- $\cos 2x = 0$ lub $\cos x = 1$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1-\cos x$ w podanym przedziale:

$x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$, $x = 2\pi$

albo

$x = 0°$, $x = 45°$, $x = 135°$, $x = 225°$, $x = 315°$, $x = 360°$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1-\cos x$ bez uwzględnienia przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie $2\sin^2 x - 1 = 0$, to za całe zadanie otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\sin^2 x(1-\cos x) = 1-\cos x$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ zakładając, że $\cos x \neq 1$, rozwiąże tylko równanie $2\sin^2 x - 1 = 0$ i nie rozpatrzy równania $\cos x = 1$, to za całe zadanie otrzymuje **2 punkty**.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy równanie za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej $2\left(1-\cos^2 x\right) - 2\left(1-\cos^2 x\right)\cos x = 1-\cos x$ i przekształcamy do postaci

$2 - 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x - 1 + \cos x = 0$

$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

Następnie zapisujemy to równanie w postaci iloczynowej

$\left(2\cos^2 x - 1\right)(\cos x - 1) = 0$.

Zatem

$2\cos^2 x - 1 = 0$ lub $\cos x - 1 = 0$.

Stąd otrzymujemy:

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$		$\cos x = 1$
$x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$	lub	$x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$,	lub	$x = 0$ lub $x = 2\pi$
albo		albo		albo
$x = 135^\circ$ lub $x = 225^\circ$		$x = 45^\circ$ lub $x = 315^\circ$		$x = 0^\circ$ lub $x = 360^\circ$

Zatem rozwiązaniami równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ są:

$x = 0$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$ lub $x = \frac{7}{4}\pi$ lub $x = 2\pi$

albo

$x = 0^\circ$ lub $x = 45^\circ$ lub $x = 135^\circ$ lub $x = 225^\circ$ lub $x = 315^\circ$ lub $x = 360^\circ$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w postaci iloczynowej, np.

$(2\cos^2 x - 1)(\cos x - 1) = 0$ lub $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)(\cos x - 1) = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania w postaci alternatywy:

- $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lub $\cos x = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie jednego z otrzymanych równań.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zapisanie wszystkich rozwiązań równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w podanym przedziale:

$x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$, $x = 2\pi$

albo

$x = 0^\circ$, $x = 45^\circ$, $x = 135^\circ$, $x = 225^\circ$, $x = 315^\circ$, $x = 360^\circ$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązania równania $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ bez uwzględnienia przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ bez odpowiedniego założenia i rozwiąże tylko równanie $2\cos^2 x - 1 = 0$, to za całe zadanie otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie w postaci $2\cos^2 x(\cos x - 1) = \cos x - 1$, a następnie podzieli obie strony równania przez $\cos x - 1$ zakładając, że $\cos x \neq 1$, rozwiąże tylko równanie $2\cos^2 x - 1 = 0$ i nie rozpatrzy równania $\cos x = 1$, to za całe zadanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 5. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie własności ciągu geometrycznego, wzorów na *n*-ty wyraz tego ciągu i na sumę *n* wyrazów ciągu arytmetycznego

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równość: $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}}=3^{x_{n+1}-x_n}$.

Zatem $27=3^{x_{n+1}-x_n}$. Stąd $x_{n+1}-x_n=3$ dla $n\ge 1$.

Zauważamy, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej *n*: $x_{n+1}-x_n=3$, to ciąg (x_n) jest arytmetyczny o różnicy $r=3$.

Z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} x_1+(x_1+r)+...+(x_1+9r)=145 \\ r=3 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ do postaci: $\begin{cases} 10x_1+45r=145 \\ r=3 \end{cases}$ i podstawiamy $r=3$ do pierwszego równania. Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą: $10x_1+135=145$. Stąd $x_1=1$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie odpowiedniego równania, np. $27=3^{x_{n+1}-x_n}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie zależności między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu (x_n): $x_{n+1}-x_n=3$ (wystarczy zapis, np. $x_2-x_1=3$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie układu równań

$$\begin{cases} x_1+(x_1+r)+...+(x_1+9r)=145 \\ r=3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \frac{2x_1+9r}{2}\cdot 10=145 \\ r=3 \end{cases}, \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 10x_1+45r=145 \\ r=3 \end{cases},$$

lub równania $x_1+(x_1+3)+...+(x_1+27)=145$ i przekształcenie do równania w postaci, np.: $10x_1+135=145$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie x_1: $x_1=1$.

Uwaga

Jeżeli zdający pomyli własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania

Z warunków zadania zapisujemy równość: $3^{x_1+x_2+...+x_n}=3^{145}$.

Zatem

$3^{x_1}\cdot 3^{x_2}\cdot ...\cdot 3^{x_n}=3^{145}$

Korzystając z tego, że ciąg (a_n) jest geometryczny o ilorazie $q=27$ otrzymujemy

$3^{x_1}\cdot 3^{x_1}\cdot 27...\cdot 3^{x_1}\cdot 27^9=3^{145}$

Stąd

$3^{10x_1}\cdot 27^{1+2+...+9}=3^{145}$

$3^{10x_1}\cdot 3^{3\cdot 45}=3^{145}$

$3^{10x_1+135}=3^{145}$

$10x_1+135=145$

$10x_1=10$

$x_1=1$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie warunków zadania i zapisanie równości: $3^{x_1+x_2+...+x_n}=3^{145}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równania: $3^{x_1}\cdot 3^{x_1}\cdot 27\cdot ...\cdot 3^{x_1}\cdot 27^9=3^{145}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Przekształcenie równania do postaci: $10x_1+135=145$.

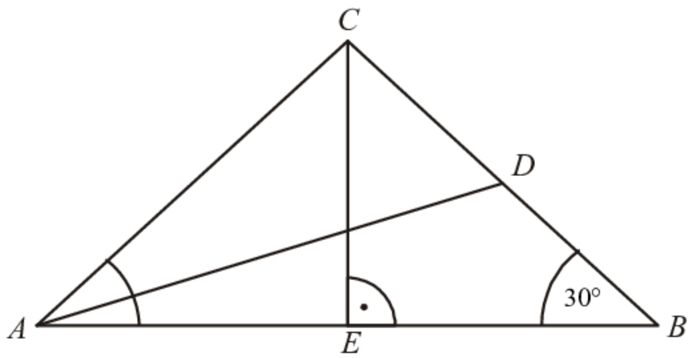
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie x_1: $x_1=1$.

Zadanie 6. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii

I sposób rozwiązania



Z treści zadania wynika, że $|BD|=\frac{1}{2}|BC|$ i $|\sphericalangle ABC|=30^\circ$ oraz $|BE|=4$.

Z trójkąta prostokątnego BEC otrzymujemy: $\cos 30^\circ = \frac{|BE|}{|BC|}$.

Zatem $\frac{4}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ i $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy $|AD|$, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD.

$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2|AB|\cdot|BD|\cdot\cos\sphericalangle ABD$,

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot 8\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$|AD|^2 = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{16\cdot 7}{3}$.

Stąd $|AD| = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$.

__**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i obliczenie długości odcinka BC lub CE:

$|BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ lub $|CE| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD:

$|AD|^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot 8\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\cos 30^\circ$

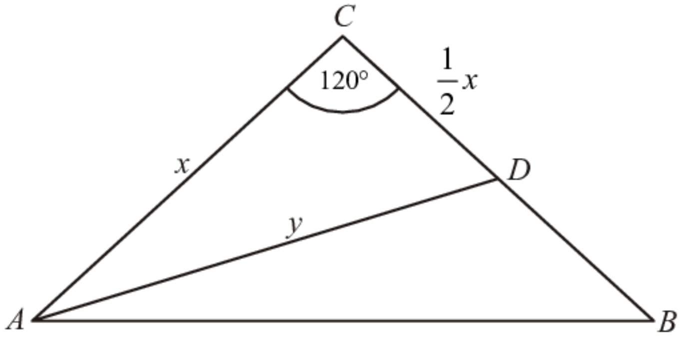
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej AD: $|AD| = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

__**Uwaga**__

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość $\cos 30^\circ$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia: x – długość ramienia trójkąta ABC,
y – długość środkowej AD tego trójkąta.

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC, gdzie $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$:

$8^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos 120^\circ$. Przekształcamy równanie do postaci $64 = 2x^2 + x^2$.

Stąd otrzymujemy: $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Ponieważ $|CD| = \frac{1}{2}x$, stąd $|CD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy $|AD|$, stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta ADC:

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$y^2 = \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{112}{3}$. Stąd otrzymujemy $y = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC,
np. $8^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos 120^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie x lub x^2: $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $x^2 = \frac{64}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC:

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ$$

albo

$$y^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{112}{3}.$$

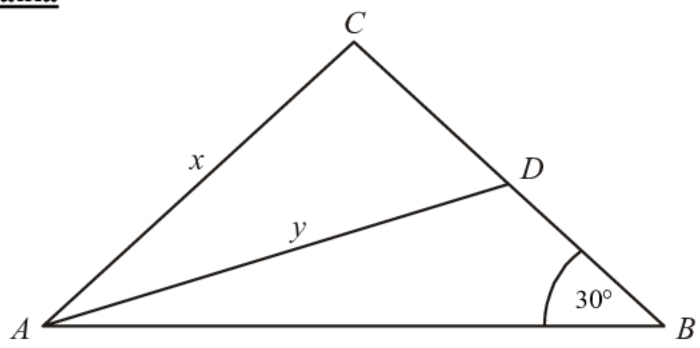
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej AD: $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Uwaga

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość $\cos 120^\circ$ (np. zapomina o znaku) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

III sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia: x – długość ramienia trójkąta ABC,
y – długość środkowej AD tego trójkąta.
Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC, gdzie $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$

$x^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 30^\circ$.

Przekształcamy równanie do postaci: $64 = 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Stąd otrzymujemy: $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Ponieważ $|BD| = \frac{1}{2}x$, stąd $|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy $|AD|$ stosując twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABD:

$y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ$, $y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{112}{3}$.

Stąd otrzymujemy $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC,
np. $x^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 30^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie x lub x^2: $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $x^2 = \frac{64}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC:

$y^2 = 8^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ$.

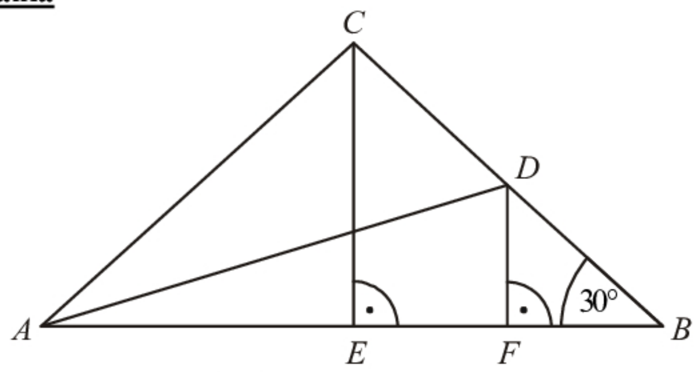
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej y: $y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Uwaga

Jeśli zdający błędnie wyznaczy wartość $\cos 30^\circ$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

IV sposób rozwiązania



Z treści zadania wynika, że $|AE| = |EB| = 4$. Ponieważ $DF \parallel CE$ i D jest środkiem odcinka BC, to F jest środkiem odcinka EB. Stąd $|FB| = 2$.

Trójkąt BDF jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości FB, więc $|FB| = \frac{2|DF|\sqrt{3}}{2}$.

Stąd $|DF| = \frac{|FB|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADF obliczamy długość środkowej AD:

$$|AD| = \sqrt{|AF|^2 + |DF|^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{112}{3}} = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości odcinka FB: $|FB| = 2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka DF: $|DF| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równości wynikającej twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADF:

$|AD|^2 = |AF|^2 + |DF|^2$.

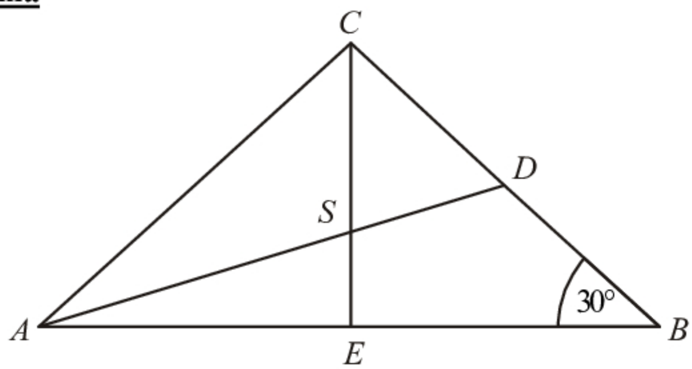
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej AD: $|AD| = \sqrt{\frac{112}{3}} = 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Uwaga

Rozwiązanie analityczne jest zastosowaniem IV sposobu rozwiązania.

V sposób rozwiązania



Z treści zadania wynika, że $|AE|=|EB|=4$. Trójkąt CEB jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości FB, więc $|EB|=\frac{2|CE|\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|CE|=\frac{|EB|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia o środku ciężkości trójkąta wynika, że $|AS|=\frac{2}{3}|AD|$ i $|SE|=\frac{1}{3}|CE|=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASE mamy:

$|AS|^2=|AE|^2+|SE|^2$ czyli $\left(\frac{2}{3}|AD|\right)^2=4^2+\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2$.

Stąd

$$\frac{4}{9}|AD|^2=16+\frac{16}{27}$$

$$\frac{4}{9}|AD|^2=\frac{448}{27}$$

$$|AD|=\sqrt{\frac{112}{3}}=4\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ... 1 pkt

Obliczenie długości odcinka CE: $|CE|=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ... 2 pkt

Zapisanie, że $|AS|=\frac{2}{3}|AD|$ i $|SE|=\frac{1}{3}|CE|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ... 3 pkt

Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASE:

$|AD|^2=|AF|^2+|DF|^2$.

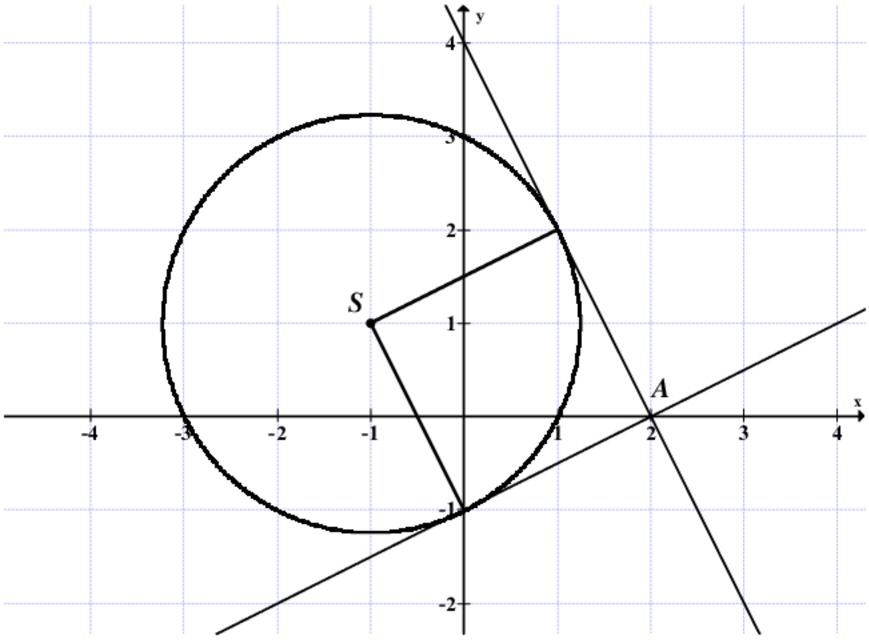
Rozwiązanie pełne ... 4 pkt

Wyznaczenie długości środkowej AD: $|AD|=4\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$.

Zadanie 7. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu

I sposób rozwiązania (parametryczny)



Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x=2$ nie jest styczna do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ (odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia).
Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A=(2,0)$:
$y=a(x-2)$ lub $y=ax-2a$ w zależności od parametru a (gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym prostej stycznej).

Zapisujemy układ równań $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-3=0 \\ y=ax-2a \end{cases}$ i doprowadzamy do równania kwadratowego z niewiadomą x, np. $x^2+(ax-2a)^2+2x-2(ax-2a)-3=0$ Prosta $y=ax-2a$ jest styczna do okręgu wtedy, gdy układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli gdy równanie kwadratowe $x^2+(ax-2a)^2+2x-2(ax-2a)-3=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Przekształcamy równanie

$x^2+a^2x^2-4a^2x+4a^2+2x-2ax+4a-3=0$,

$x^2(1+a^2)+x(-4a^2-2a+2)+4a^2+4a-3=0$.

Zapisujemy warunek na to, aby równanie $x^2(1+a^2)+x(-4a^2-2a+2)+4a^2+4a-3=0$ miało jedno rozwiązanie: $\Delta=0$.

Zatem $(-4a^2-2a+2)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(4a^2+4a-3)=0$.

$4(2a^2+a-1)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(4a^2+4a-3)=0$

Stąd $2a^2+3a-2=0$.

- rozwiązujemy równanie $2a^2 + 3a - 2 = 0$:
  $\Delta = 25$
  $a_1 = -2$ lub $a_2 = \frac{1}{2}$.
  Z tego, że a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1 \cdot a_2 = -1$ wynika, że styczne są do siebie prostopadłe.
  Stąd miara kąta między stycznymi jest równa $90°$.

albo

- korzystamy ze wzorów Viète'a i zapisujemy $a_1 \cdot a_2 = \frac{-2}{2} = -1$, gdzie a_1 i a_2 są pierwiastkami równania $2a^2 + 3a - 2 = 0$.
  Z tego, że a_1, a_2 oznaczają współczynniki kierunkowe prostych stycznych i $a_1 \cdot a_2 = -1$ wynika, że styczne są do siebie prostopadłe.
  Stąd miara kąta między stycznymi jest równa $90°$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zapisanie równania kierunkowego prostej przechodzącej przez punkt $A = (2,0)$ w postaci, np.:

$y = a(x-2)$ lub $y = ax - 2a$, lub $ax - y - 2a = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = ax - 2a \end{cases}$ i doprowadzenie do równania kwadratowego z niewiadomą x, gdzie a jest parametrem, np.

$x^2(1 + a^2) + x(-4a^2 - 2a + 2) + 4a^2 + 4a - 3 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

- Obliczenie wartości parametru a, dla których równanie ma jedno rozwiązanie i zapisanie, że dla tych wartości a proste styczne są prostopadłe

albo

- Wykorzystanie wzorów Viète'a do zapisania $a_1 \cdot a_2 = -1$ i stwierdzenie, że proste styczne są prostopadłe.

<u>II sposób rozwiązania</u> (odległość punktu od prostej)

Przekształcamy równanie okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ do postaci $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S = (-1,1)$, $r = \sqrt{5}$.

Stwierdzamy, że prosta o równaniu $x = 2$ nie jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$.

Zapisujemy równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $A = (2,0)$ i stycznej do okręgu:

$y = a(x-2)$ lub $y = ax - 2a$ lub $ax - y - 2a = 0$ w zależności od parametru a (gdzie a oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).

Wyznaczamy odległość środka S okręgu od prostej o równaniu $ax - y - 2a = 0$:

$$d = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Ponieważ promień okręgu jest równy odległości środka okręgu S od stycznej, więc otrzymujemy równanie

$$\sqrt{5} = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}} .$$

Przekształcamy to równanie

$$\sqrt{5a^2+5} = |-3a-1|$$

$$5a^2+5 = 9a^2+6a+1$$

$$4a^2+6a-4=0$$

stąd

$$2a^2+3a-2=0.$$

Dalej postępujemy jak w sposobie I.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zapisanie równania prostej przechodzącej przez punkt $A=(2,0)$ i stycznej do okręgu w postaci, np.: $y = a(x-2)$ lub $y = ax - 2a$, lub $ax - y - 2a = 0$ (gdzie a oznacza współczynnik kierunkowy prostej stycznej).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie równania $\sqrt{5} = \frac{|-a-1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}$, gdzie $S=(-1,1)$ jest środkiem okręgu o promieniu $r=\sqrt{5}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

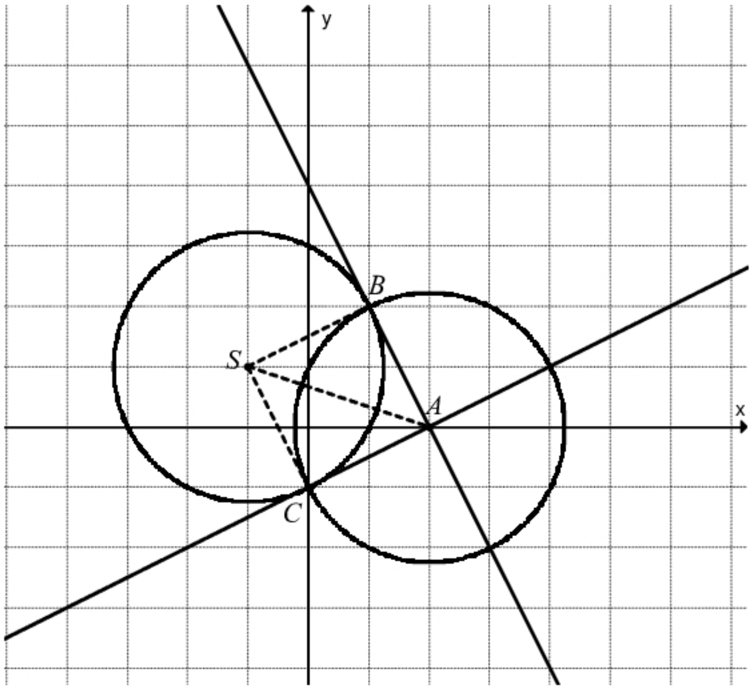
Obliczenie wartości parametru a, dla których równanie ma jedno rozwiązanie i zapisanie, że dla tych wartości a, proste styczne są prostopadłe.

III sposób rozwiązania (punkty styczności)

Przekształcamy równanie okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ do postaci $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S = (-1,1)$, $r = \sqrt{5}$.

Wykonujemy rysunek, na którym zaznaczamy okrąg o środku $S = (-1,1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ oraz punkt $A = (2,0)$.



Niech punkty B i C będą punktami styczności prostych poprowadzonych z punktu $A = (2,0)$ do okręgu o równaniu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Wówczas $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SCA| = 90^\circ$ i $|SA|$ jest przeciwprostokątną w trójkątach ACS i ABS.

Obliczamy lub odczytujemy długość odcinka $|SA|$:

$$|SA| = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Ponieważ $|SB|^2 + |AB|^2 = |SA|^2$ i $|SC|^2 + |CA|^2 = |SA|^2$, to $|AB| = \sqrt{5}$ i $|AC| = \sqrt{5}$.

Stąd $|SB| = |AB| = |AC| = |SC|$.

Zapisujemy równanie okręgu o środku w punkcie $A = (2,0)$ i promieniu $|AB| = \sqrt{5}$:

$(x-2)^2 + y^2 = 5$.

Punkty przecięcia okręgów o równaniach $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ i $(x-2)^2 + y^2 = 5$, które są jednocześnie punktami styczności prostych stycznych do okręgu $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$, poprowadzonych przez punkt $A = (2,0)$, to punkty B i C. Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

lub odczytujemy z wykresu: $B = (1,2)$ i $C = (0,-1)$.

Przekształcamy układ równań do równania i wyznaczamy y w zależności od x:

$(x+1)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+y^2$

$x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2$

$-4x+4-2x+2y-2=0$

$-6x+2y+2=0$

$2y=6x-2$

$y=3x-1$.

Podstawiamy $y=3x-1$ do równania $(x-2)^2+y^2=5$.

Przekształcamy to równanie

$(x-2)^2+(3x-1)^2=5$

$10x^2-10x=0$

$10x(x-1)=0$.

Stąd $x=0$ lub $x-1=0$.
Zatem $x=0$ lub $x=1$.
Zatem $y=-1$ lub $y=2$.

Punkty styczności mają współrzędne $B=(1,2)$ i $C=(0,-1)$.

Zapisujemy równania stycznych AB i AC do okręgu $(x+1)^2+(y-1)^2=5$:

$y=-2x+4$ i $y=\frac{1}{2}x-1$ lub tylko ich współczynniki kierunkowe: $a_1=-2$, $a_2=\frac{1}{2}$.

Ponieważ $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$, to proste AB i AC są prostopadłe.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zauważenie, że trójkąty ACS i ABS są prostokątne i obliczenie długości przeciwprostokątnej, np. $|SA|=\sqrt{10}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

- Zapisanie i rozwiązanie układu równań $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=5\\(x-2)^2+y^2=5\end{cases}$: $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ lub $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

albo

- Odczytanie z wykresu współrzędnych punktów styczności: $B=(1,2)$, $C=(0,-1)$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

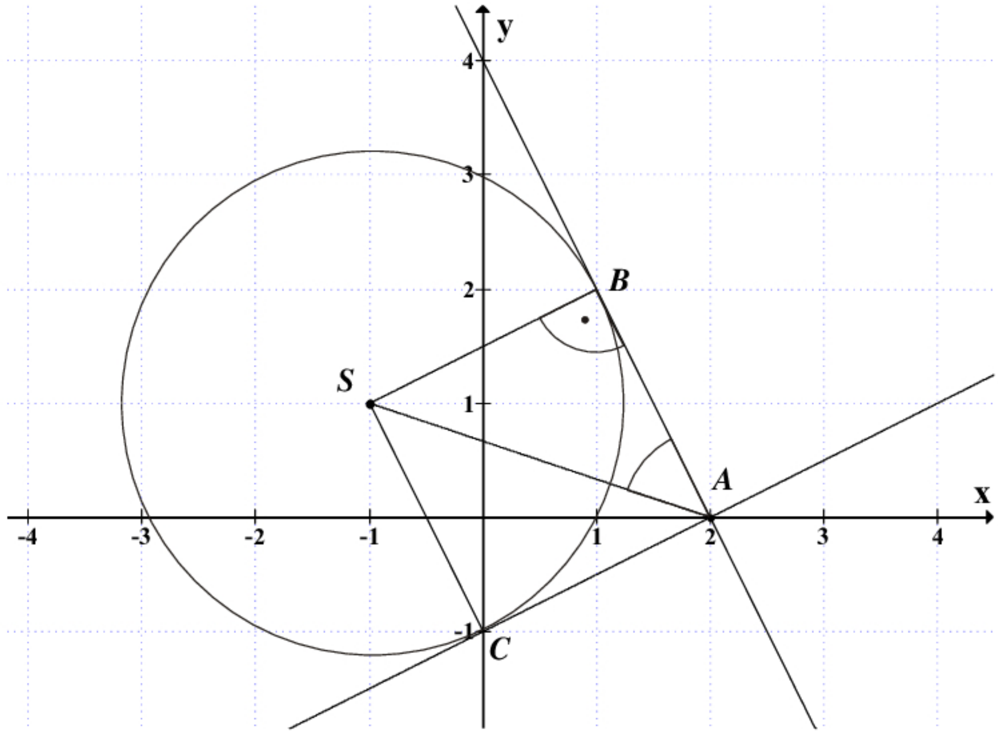
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie równań stycznych do okręgu lub tylko ich współczynników kierunkowych i zapisanie, że proste styczne są prostopadłe.

IV sposób rozwiązania

Wyznaczamy współrzędne środka S i promień r tego okręgu: $S=(-1,1)$, $r=\sqrt{5}$.

Wykonujemy rysunek, na którym zaznaczamy okrąg o środku $S=(-1,1)$ i promieniu $r=\sqrt{5}$ oraz punkt $A=(2,0)$.



$|SB|=\sqrt{5}$

$|SA|=\sqrt{(-1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$

$\sin|\sphericalangle SAB|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Stąd $|\sphericalangle SAB|=45^\circ$ czyli $|\sphericalangle BAC|=90^\circ$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Obliczenie promienia okręgu: $|SB|=\sqrt{5}$ i obliczenie długości odcinka SA: $|SA|=\sqrt{10}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Obliczenie $\sin|\sphericalangle SAB|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub obliczenie $|AB|=\sqrt{5}$ (lub $|AC|=\sqrt{5}$) lub zapisanie $|SA|=|SB|\sqrt{2}$.

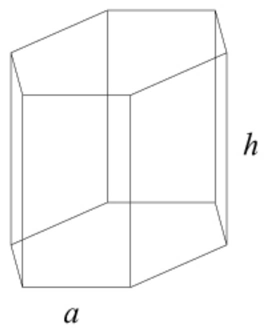
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie miary kąta BAC: $|\sphericalangle BAC|=90^\circ$ lub zapisanie, że kąt BAC jest prosty.

Zadanie 8. (0–4)

Modelowanie matematyczne	Znalezienie związków miarowych w graniastosłupie, wyznaczenie największej wartości funkcji

Rozwiązanie



Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa,
h – długość krawędzi bocznej graniastosłupa.

Z tego, że suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 24, mamy $12a + 6h = 24$.

Wyznaczamy jedną ze zmiennych: $h = 4 - 2a$ lub $a = 2 - \frac{h}{2}$.

Pole P powierzchni bocznej jest równe $P = 6ah$ dla $a \in (0,2)$ oraz $h \in (0,4)$.

Aby wyznaczyć długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe,

- zapisujemy funkcję P w zależności od zmiennej a
  $P(a) = 6a(4 - 2a)$, $P(a) = -12a^2 + 24a$.
  Pole P ma największą wartość, gdy $a = 1$.

albo

- zapisujemy funkcję P w zależności od zmiennej h
  $P(h) = 6h\left(2 - \frac{h}{2}\right)$, $P(h) = -3h^2 + 12h$.
  Pole P ma największą wartość, gdy $h = 2$.
  Zatem $a = 1$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie, że $12a + 6h = 24$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie pola P powierzchni bocznej graniastosłupa oraz wyznaczenie a lub h w zależności od jednej zmiennej, np.:

$P = 6ah$ oraz $a = 2 - \frac{h}{2}$ lub $h = 4 - 2a$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie pola powierzchni bocznej w zależności od jednej zmiennej:

$P(a)=6a(4-2a)$ lub $P(h)=6h\left(2-\frac{h}{2}\right)$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie długość krawędzi podstawy graniastosłupa, którego pole powierzchni bocznej jest największe: $a=1$.

__Uwaga__
Jeżeli zdający wyznaczy tylko wartość $h=2$, dla której pole powierzchni bocznej jest największe, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 9. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

__Rozwiązanie__

Wybieramy miejsce dla dwójek. Jest $\binom{8}{2}=28$ takich miejsc.

Wybieramy miejsce dla trójek. Jest $\binom{6}{3}=20$ takich miejsc.

Na pozostałych trzech miejscach mogą wystąpić cyfry: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jest 7^3 ciągów trójelementowych ze zbioru siedmioelementowego.
Zatem jest $28\cdot 20\cdot 7^3=4^2\cdot 5\cdot 7^4=192080$ liczb spełniających warunki zadania.

__Schemat oceniania__
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki albo obliczenie liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki, albo obliczenie na ile sposobów można zapełnić trzy pozostałe miejsca.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie obu wielkości: liczby miejsc, na których mogą znajdować się dwójki i liczby miejsc, na których mogą znajdować się trójki.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie liczby ciągów na pozostałych miejscach, skorzystanie z reguły mnożenia i obliczenie, że jest 192080 szukanych liczb.

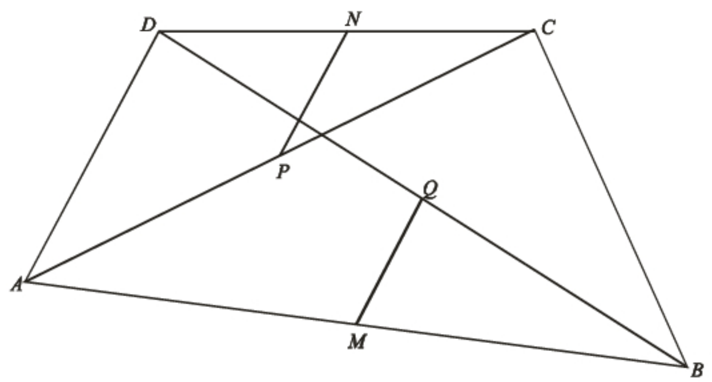
Uwagi

1. Zdający może obliczać liczby miejsc dla dwójek i trójek w sposób następujący: $\binom{8}{5}\binom{5}{3}$ albo $\binom{8}{5}\binom{5}{2}$, albo najpierw miejsca dla cyfr różnych od 2 i od 3 i potem miejsca dla dwójek (lub trójek): $\binom{8}{3}\binom{5}{2}$ ($\binom{8}{3}\binom{5}{3}$).
2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie przy założeniu, że pozostałe trzy liczby „są różne”, otrzymując $\binom{8}{2}\binom{6}{3}\cdot 7\cdot 6\cdot 5$, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Za rozwiązanie $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 7^3$ zdający otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie: *ile jest liczb ośmiocyfrowych w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują co najmniej dwie dwójki i występują co najmniej trzy trójki*, to otrzymuje **4 punkty** (poprawny wynik: 247240).
5. Odpowiedź $\binom{8}{2}\binom{6}{3}\cdot 9^3$ jest błędna (błąd merytoryczny). W takim przypadku zdający otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 10. (0–3)

Rozumowanie i argumentacja	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich

Rozwiązanie



Ponieważ punkty N i P są środkami boków DC i AC trójkąta ADC, więc $NP \parallel AD$.
Punkty M i Q są środkami boków AB i DB trójkąta ABD, więc $MQ \parallel AD$.
Zatem $NP \parallel MQ$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zapisanie, że: $NP \parallel AD$ lub $MQ \parallel AD$.

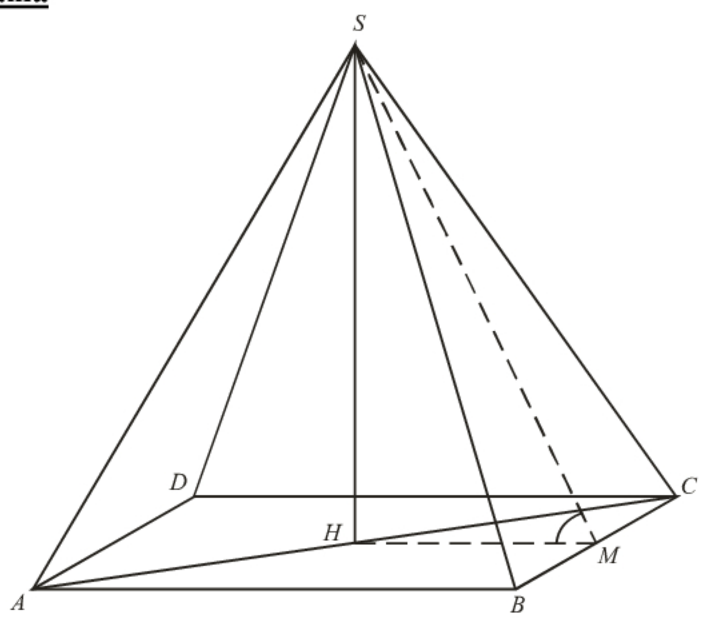
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zapisanie i uzasadnienie, że $NP \parallel AD$ oraz $MQ \parallel AD$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Zapisanie wniosku, że $NP \parallel MQ$.

Zadanie 11. (0–6)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie

I sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = 5x$. Ponieważ $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$ stąd $|AH| = 3x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CHS otrzymujemy: $|SH| = \sqrt{|CS|^2 - |HC|^2} = \sqrt{(5x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x$.

Ponieważ $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}$, stąd $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$.

Zatem $|CM| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{6x}{\sqrt{2}} = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MCS otrzymujemy $|SM|^2 = |CS|^2 - |CM|^2$.

Stąd $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{50-9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2}$, $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$.

Zatem $\sin\alpha = \frac{|SH|}{|SM|} = \frac{4x}{\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie $|AH| = 3x$ i $|SH| = 4x$ przy przyjętych oznaczeniach, np.: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|AS| = |CS| = 5x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 pkt

Wyznaczenie długości BC: $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ lub $|BC| = 3x\sqrt{2}$ i wyznaczenie długości CM:

$|CM| = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$ lub $|CM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Wyznaczenie długości SM: $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$ lub $|SM| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

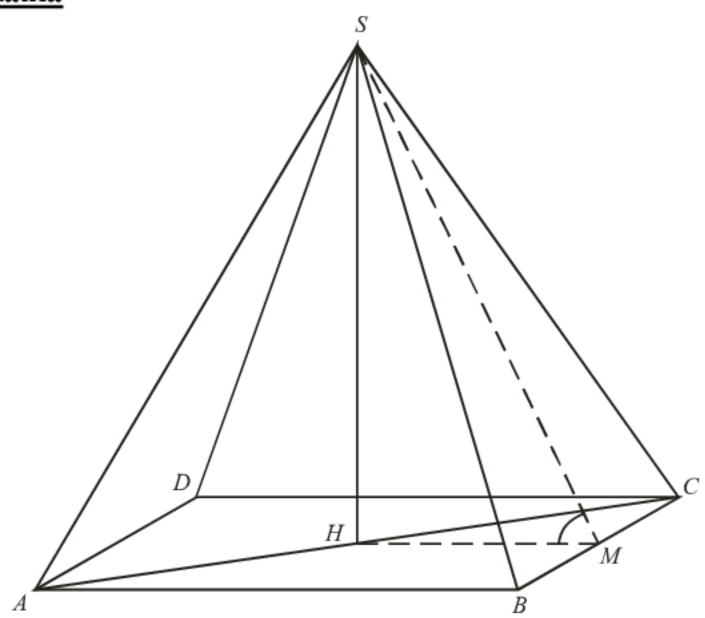
Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Wyznaczenie sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający wyznaczy jedną z wielkości $|BC|$ lub $|BM|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, to za rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy $\mathrm{tg}\alpha$ lub $\cos\alpha$, a nie obliczy $\sin\alpha$ lub obliczy go z błędem, to otrzymuje **5 punktów**.

II sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $a = |AB| = |BC| = |CD| = |AD|$, stąd $|AC| = a\sqrt{2}$ i $|AH| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Zapisujemy równość wynikającą z treści zadania:

$\frac{|AC|}{|AS|}=\frac{6}{5}$ czyli $\frac{a\sqrt{2}}{|AS|}=\frac{6}{5}$, stąd $|AS|=\frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ASH otrzymujemy:

$$|SH|=\sqrt{|AS|^2-|AH|^2}\text{, stąd } |SH|=\sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{2}}{6}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25a^2\cdot 2}{36}-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{16a^2}{18}}=\frac{4a}{3\sqrt{2}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego SHM otrzymujemy:

$|SM|=\sqrt{|SH|^2+|HM|^2}$ (gdzie $|HM|=\frac{1}{2}a$.

Stąd $|SM|=\sqrt{\left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{16a^2}{18}+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{32a^2+9a^2}{36}}=\sqrt{\frac{41a^2}{36}}=\frac{\sqrt{41}}{6}\cdot a$.

Zatem $\sin\alpha=\frac{|SH|}{|SM|}=\frac{\frac{4a}{3\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{41}a}{6}}=\frac{4a}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{41}a}=\frac{4\sqrt{82}}{41}$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń: $\alpha=|\sphericalangle HMS|$, $|AC|=a\sqrt{2}$, gdzie $a=|AB|=|BC|=|CD|=|AD|$

$\frac{|AC|}{|AS|}=\frac{6}{5}$ oraz wyznaczenie $|AS|=\frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 pkt

Zapisanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CSH :

$|SH|=\sqrt{\left(\frac{5a\sqrt{2}}{6}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ i wyznaczenie: $|SH|=\frac{4a}{3\sqrt{2}}$ lub $|SH|=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Zapisanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego SHM:

$|SM|=\sqrt{\left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ lub $|SM|=\sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ i wyznaczenie $|SM|$: $|SM|=\frac{\sqrt{41}a}{6}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

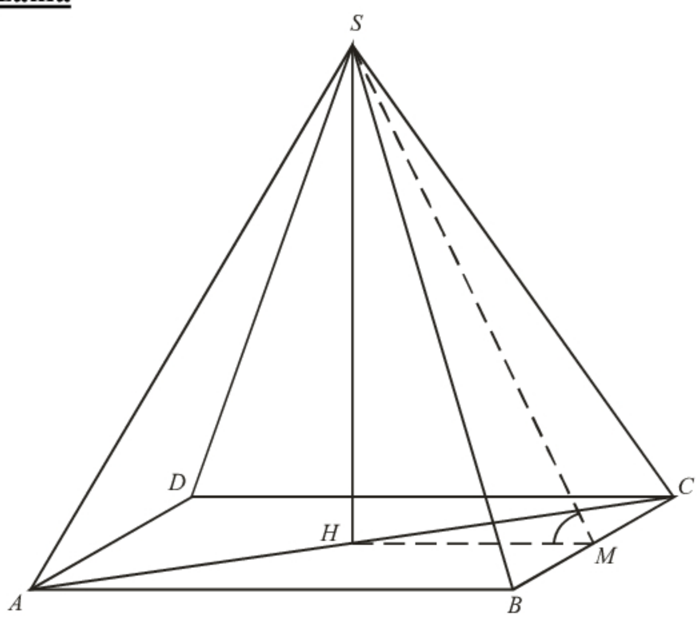
Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Wyznaczenie sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{82}}{41}$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Jeśli zdający wyznaczy jedną z wielkości $|BC|$ lub $|BM|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, to za rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy $\mathrm{tg}\alpha$ lub $\cos\alpha$, a nie obliczy $\sin\alpha$ lub obliczy go z błędem, to otrzymuje **5 punktów**.

III sposób rozwiązania



Wprowadzamy oznaczenia: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|HC| = 3x$, $|SC| = 5x$. Ponieważ $|AH| = \frac{1}{2}|AC|$ stąd $|AH| = 3x$.

Wtedy $|BC|\sqrt{2} = 6x$, stąd $|BC| = \frac{6x}{\sqrt{2}}$.

Zatem $|BM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$, $|HM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BMS otrzymujemy $|SM|^2 = |BS|^2 - |BM|^2$.

Stąd $|SM| = \sqrt{25x^2 - \frac{9}{2}x^2} = \sqrt{\frac{41}{2}x^2} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}x$.

Zatem $\cos\alpha = \frac{|HM|}{|SM|} = \frac{3x}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{41}\cdot x} = \frac{3}{\sqrt{41}}$.

Stąd $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{41}} = \sqrt{\frac{32}{41}} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{41}}{41} = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń: $\alpha = |\sphericalangle HMS|$, $|AC| = 6x$, $|HC| = 3x$, $|SC| = 5x$, $|AH| = 3x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 pkt

Wyznaczenie długości BC: $|BC| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}} = \frac{6x}{\sqrt{2}}$ lub $|BC| = 3x\sqrt{2}$ i wyznaczenie długości $|BM| = |HM| = \frac{3x}{\sqrt{2}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Wyznaczenie długości SM: $|SM| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}} \cdot x$ lub $|SM| = \frac{\sqrt{82}}{2} \cdot x$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Obliczenie $\cos\alpha$, a następnie $\sin\alpha$: $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{41}}$, $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{82}}{41}$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający obliczy jedynie $\cos\alpha$, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 12. (0–3)

Użycia i tworzenia strategii	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń

<u>I sposób rozwiązania.</u>

Wiemy, że $A \cup B = (A \cap B') \cup B$ i $(A \cap B') \cap B = \emptyset$ oraz $P(A \cup B) \le 1$.

Mamy więc: $1 \ge P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B)$, stąd $P(A \cap B') \le 0{,}3$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, że $A \cup B = (A \cap B') \cup B$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie, że $(A \cap B') \cap B = \emptyset$ oraz, że $P(A \cup B) \le 1$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zapisanie wniosku: $P(A \cap B') \le 0{,}3$.

II sposób rozwiązania.

Wiemy, że $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Stąd $P(A \cap B) \geq 0{,}6$.

Mamy więc: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \leq 0{,}9 - 0{,}6 = 0{,}3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie, że $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Uzasadnienie, że $P(A \cap B) \geq 0{,}6$, np. zapisze $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, stąd $P(A \cap B) \geq 0{,}6$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Wykazanie, że: $P(A \cap B') \leq 0{,}3$.

III sposób rozwiązania.

Z faktu, że $A \cap B' \subset B'$ wynika, że $P(A \cap B') \leq P(B')$.

Ponieważ $P(B) = 0{,}7$, więc $P(B') = 0{,}3$. Stąd wynika, że $P(A \cap B') \leq P(B') = 0{,}3$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie $P(B')$: $P(B') = 0{,}3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zapisanie lub wykorzystanie faktu, że $A \cap B' \subset B'$.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zapisanie wniosku: $P(A \cap B') \leq 0{,}3$.