

**Zadanie 1. (4 pkt)**

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania  $2 \sin^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Rozwiązanie**

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna  $2(1 - \cos^2 x) - 7 \cos x - 5 = 0$

$$2 - 2 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np.  $t = \cos x$ , gdzie  $t \in \langle -1, 1 \rangle$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2t^2 + 7t + 3 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = \frac{-7-5}{4} = -3 \quad t_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Odrzucamy rozwiązanie  $t_1 = -3$ , ponieważ  $-3 \notin \langle -1, 1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie  $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.:

$$-2 \cos^2 x - 7 \cos x - 3 = 0 \text{ lub } 2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np.  $t = \cos x$ , zapisanie równania w postaci

$$-2t^2 - 7t - 3 = 0 \text{ lub } 2t^2 + 7t + 3 = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie równania kwadratowego ( $t = -\frac{1}{2}$  lub  $t = -3$ ) i odrzucenie rozwiązania

$$t = -3.$$

**Uwaga:**

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest  $\cos x$ ) i zapisać rozwiązanie w postaci  $\cos x = -\frac{1}{2}$  lub  $\cos x = -3$  oraz zapisać, że równanie  $\cos x = -3$  jest sprzeczne.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

albo

$$x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający podstawia  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania  $2\cos^2 x + 3 = -7\cos x$  do kwadratu i potem nie sprawdzi rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np.  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ , o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględni go.
4. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania  $t = -3$ , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$  i konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego:  $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 2. (4 pkt)**Rozwiąż nierówność  $|2x + 2| + |x - 2| > 5$ .**Isposób rozwiązania:** wyróżnienie na osi liczbowej przedziałówWyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$ .

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności

$x \in (-\infty, -1)$	$x \in \langle -1, 2 \rangle$	$x \in \langle 2, \infty \rangle$
$-2x - 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 + x - 2 > 5$
$-3x > 5$	$x > 1$	$3x > 5$
$x < -\frac{5}{3}$		$x > \frac{5}{3}$

Wyznaczamy część wspólną otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami

$$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$$

$$x \in (1, 2)$$

$$x \in \langle 2, \infty \rangle$$

i bierzemy sumę tych przedziałów:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

**II sposób rozwiązania:** zapisanie czterech przypadków

Zapisujemy cztery przypadki:  $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przypadkach:

$\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ 2x+2+x-2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ 3x > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$ $x \in \langle 2, \infty \rangle$	$\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ 2x+2-x+2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$ $x \in (1, 2)$	$\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$ <p>niemożliwe</p>	$\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ -2x-2-x+2 > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ -3x > 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \\ x < -\frac{5}{3} \end{cases}$ $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$
--	--	--	--

Podajemy odpowiedź:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

- zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty \rangle$

albo

- zapisze cztery przypadki:  $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2x+2 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów**.

Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach np:

I.  $x \in (-\infty, -1)$   $-2x-2-x+2 > 5$

II.  $x \in \langle -1, 2 \rangle$   $2x+2-x+2 > 5$

III.  $x \in \langle 2, \infty \rangle$   $2x+2+x-2 > 5$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca  
albo
- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

Uwaga:

1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte) to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np.  $|2(x+2)| + |x-2| > 5$ ), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

**III sposób rozwiązania:** graficznie 1

$$|2x+2| + |x-2| > 5.$$

Rysujemy wykres funkcji  $f(x) = |2x+2| + |x-2|$  i prostą o równaniu  $y = 5$

Wyróżniamy przedziały:  $(-\infty, -1)$ ,  $\langle -1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, \infty$ .

Zapisujemy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -2x - 2 - x + 2$$

$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = 2x + 2 - x + 2$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = 2x + 2 + x - 2$$

Przekształcamy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach do postaci, np.

$$\text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -3x$$

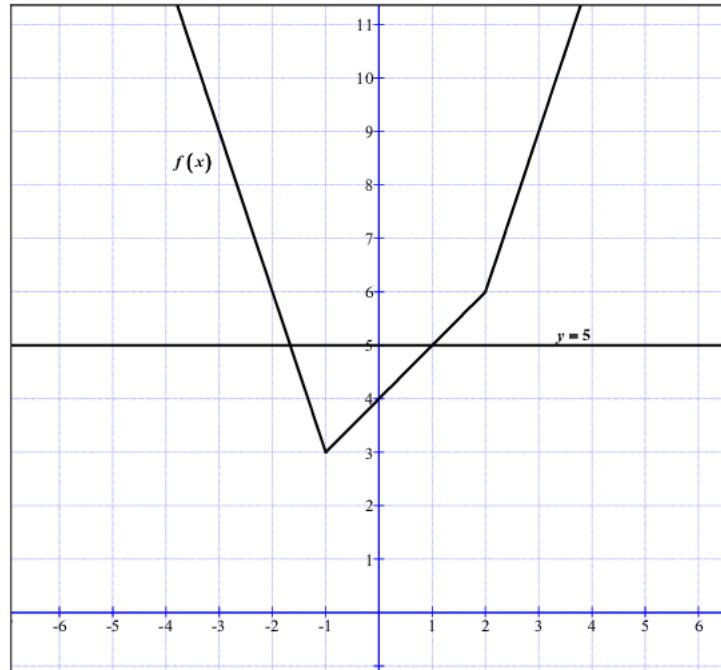
$$\text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = x + 4$$

$$\text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = 3x$$

Zapisujemy wzór funkcji, np.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x+4 & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 5$ .



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji z prostą o równaniu  $y = 5$ :

$$x = -\frac{5}{3}, x = 1.$$

Zapisujemy argumenty, dla których  $f(x) > 5$ :  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, -\frac{5}{3})$ ,  $\langle -1, 2)$ ,  $\langle 2, \infty)$ .

### Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

$$\begin{array}{l}
 \text{I. } x \in (-\infty, -1) \quad f(x) = -3x \\
 \text{II. } x \in \langle -1, 2 \rangle \quad f(x) = x + 4 \\
 \text{III. } x \in \langle 2, \infty \rangle \quad f(x) = 3x
 \end{array}
 \quad \text{lub} \quad
 f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 2, \infty \rangle \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający narysuj wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = 5$ .

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Zdający poda odpowiedź:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

Uwaga:

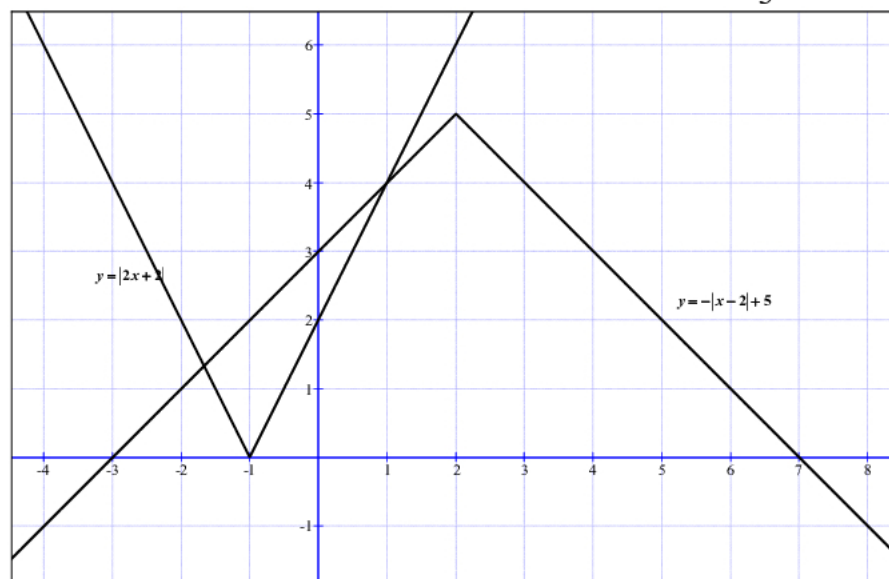
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać przedziały obustronnie domknięte. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie przedziały otwarte, to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

**IV sposób rozwiązania:** graficznie 2

Zapisujemy nierówność  $|2x + 2| + |x - 2| > 5$  w postaci, np.  $|2x + 2| > -|x - 2| + 5$ .

Rysujemy wykresy funkcji:  $y = |2x + 2|$ ,  $y = -|x - 2| + 5$ .

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji:  $x = -\frac{5}{3}$ ,  $x = 1$ .



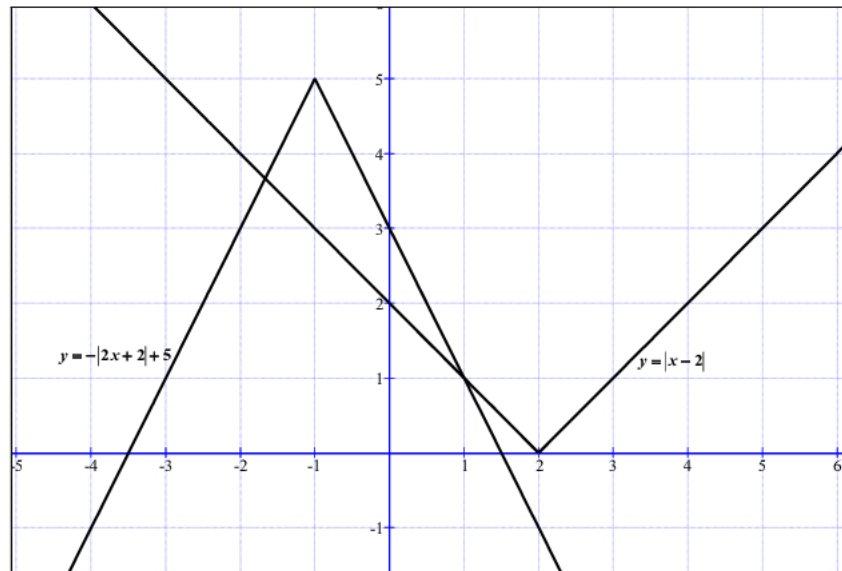
Zapisujemy odpowiedź:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

**V sposób rozwiązania:** graficznie 3

Zapisujemy nierówność  $|2x+2|+|x-2|>5$  w postaci, np.  $|x-2|>-|2x+2|+5$ .

Rysujemy wykresy funkcji:  $y=|x-2|$ ,  $y=-|2x+2|+5$ .

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji:  $x=-\frac{5}{3}$ ,  $x=1$ .



Zapisujemy odpowiedź:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 1 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci  $|2x+2|>-|x-2|+5$  lub  $|x-2|>-|2x+2|+5$  i narysuje wykres funkcji, np.  $y=2x+2$  lub  $y=x-2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający narysuje wykresy funkcji:  $y=|2x+2|$  i  $y=-|x-2|+5$

lub  $y=|x-2|$  i  $y=-|2x+2|+5$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 3 pkt

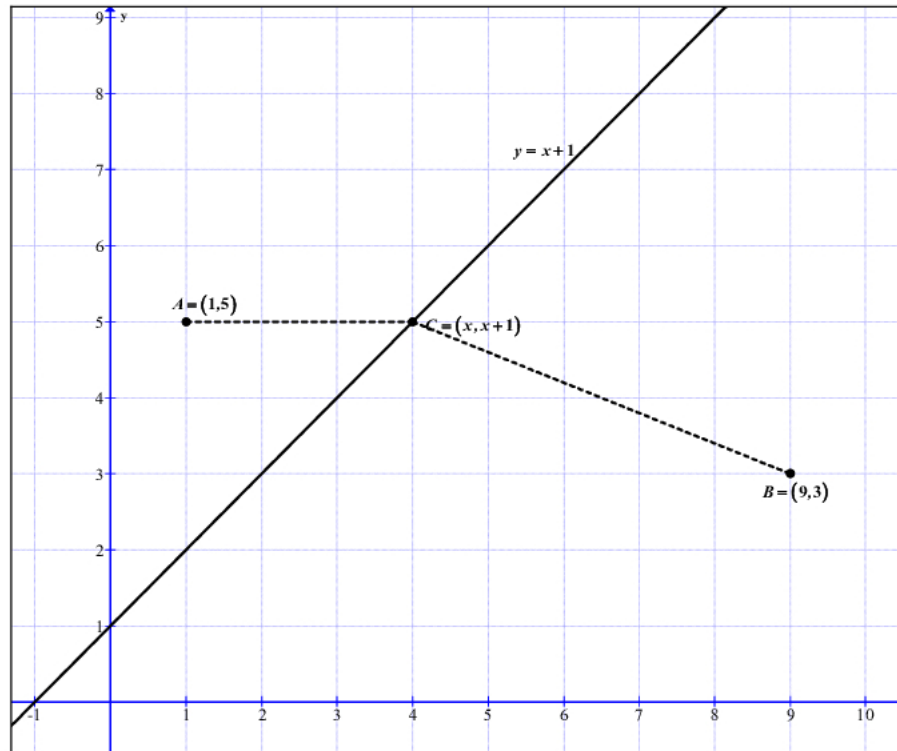
Zdający narysuje poprawnie wykresy funkcji i błędnie wyznaczy odcięte jednego z punktów przecięcia się wykresów funkcji (np.  $x=-2$  lub  $x=1$ ) i konsekwentnie poda odpowiedź.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zapisanie odpowiedzi:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ .

**Zadanie 3. (5 pkt)**

Dane są punkty  $A = (1, 5)$ ,  $B = (9, 3)$  i prosta  $k$  o równaniu  $y = x + 1$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$  leżącego na prostej  $k$ , dla którego suma  $|AC|^2 + |BC|^2$  jest najmniejsza.

**Rozwiązanie**

Punkt  $C$  leży na prostej  $k$ , więc ma współrzędne:  $C = (x, x + 1)$ .

Wyznaczamy kwadraty odległości punktu  $C$  od punktów  $A$  i  $B$ :

$$|AC|^2 = (x - 1)^2 + (x - 4)^2, \quad |BC|^2 = (x - 9)^2 + (x - 2)^2$$

Określamy wzór funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu  $C$  od punktów  $A$  i  $B$ :

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 4)^2 + (x - 9)^2 + (x - 2)^2,$$

po uporządkowaniu otrzymujemy:  $f(x) = 4x^2 - 32x + 102$ .

Wyznaczamy argument, dla którego wartość tej funkcji jest najmniejsza:  $x = 4$ .

Obliczamy rzędną punktu  $C$ :  $y = 5$ .

Odpowiedź: Współrzędne punktu  $C = (4, 5)$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie współrzędnych punktu  $C$  leżącego na prostej  $k$ :  $C = (x, x + 1)$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie zależności z jedną niewiadomą określającej kwadraty odległości punktu  $A$  od  $C$  lub odległości punktu  $B$  od  $C$  (lub odległości):



$$|AC|^2 = (x-1)^2 + (x-4)^2 \text{ lub } |BC|^2 = (x-9)^2 + (x-2)^2$$

$$(\text{albo } |AC| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-4)^2} \text{ lub } |BC| = \sqrt{(x-9)^2 + (x-2)^2}).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Określenie wzoru funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu  $C$  od punktów  $A$  i  $B$ :

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-4)^2 + (x-9)^2 + (x-2)^2 \text{ lub } f(x) = 4x^2 - 32x + 102.$$

Uwagi:

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości  $|AC|$  lub  $|BC|$  i na tym poprzestanie, to otrzymuje 2 punkty.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (4,5)$ .

Uwaga:

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości  $|AC|$  lub  $|BC|$  i rozwiązanie doprowadzi do końca, to otrzymuje 4 punkty.
2. Jeżeli zdający obliczy odciętą wierzchołka paraboli o równaniu  $y = 4x^2 - 32x + 102$  tj. pierwszą współrzędną punktu  $C$  i na tym zakończy lub błędnie obliczy jego drugą współrzędną, to otrzymuje 4 punkty.

**Zadanie 4. (5 pkt)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od  $2m^3 - 3$ .

**Rozwiązanie**

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$$

Obliczamy wyróżnik:  $\Delta = -3m^2 + 8m + 16$  i rozwiązujemy nierówność

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$$

Zapisujemy warunek  $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$  w postaci nierówności z jedną niewiadomą:

$$m - 4 < 2m^3 - 3$$

$$2m^3 - m + 1 > 0$$

Doprowadzamy nierówność do postaci

$$(m+1)(2m^2 - 2m + 1) > 0$$

Otrzymujemy  $m \in (-1, \infty)$ .

Zatem  $m \in (-1, 4)$ .

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

- a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

- b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$ ,  $m \in (-1, \infty)$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.
- c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b). Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

- zapisanie nierówności  $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$  w postaci równoważnej  $m - 4 < 2m^3 - 3$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{m-4-\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-4+\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 < 2m^3 - 3.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ..... 2 pkt**

Doprowadzenie nierówności do postaci  $(m+1)(2m^2-2m+1) > 0$  lub wyznaczenie pierwiastków wielomianu zapisanego po lewej stronie nierówności.

**Rozwiązanie bezbłędne części b) ..... 3 pkt**

Rozwiązanie nierówności:  $m \in (-1, \infty)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi  $m \in (-1, 4)$ .

Uwaga. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 5. (4 pkt)**

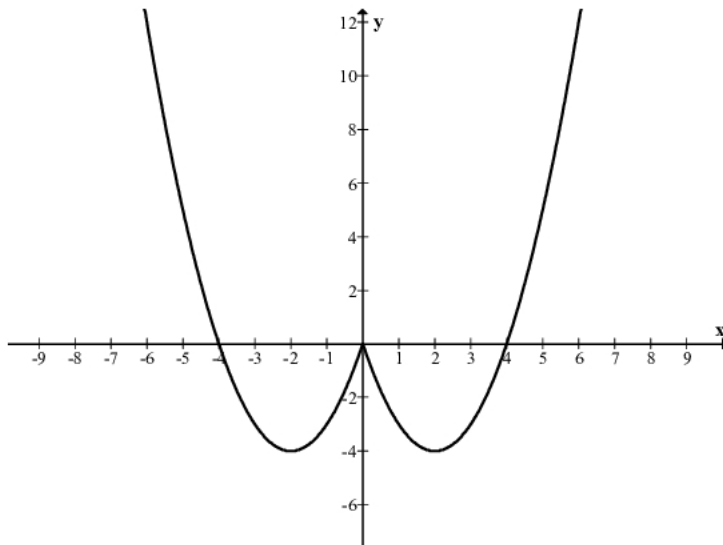
Narysuj wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = x^2 - 4|x|$  i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od wartości parametru  $m$ .

**Rozwiązanie**

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \in (0, \infty) \\ x^2 + 4x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Szkicujemy wykres otrzymanej funkcji  $f$ :



Z wykresu funkcji  $f$  odczytujemy liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$ :

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, -4) \\ 2 & \text{dla } m \in \{-4\} \cup (0, \infty) \\ 3 & \text{dla } m = 0 \\ 4 & \text{dla } m \in (-4, 0) \end{cases}$$

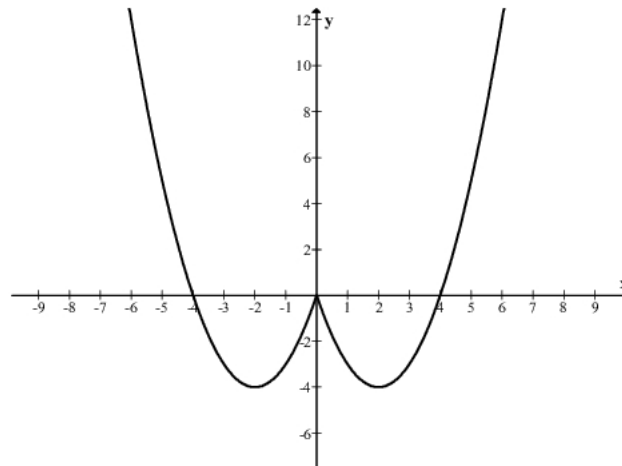
**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- zapisanie funkcji  $f$  na przykład w postaci:  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

albo

- stwierdzenie, że wykres funkcji  $f$  jest symetryczny względem osi  $Oy$  lub stwierdzenie równoważne.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**Narysowanie wykresu funkcji  $f$ .**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania..... 3 pkt**

- zdający popełni jeden błąd w ustalaniu liczby rozwiązań równania  $f(x) = m$  albo
- zdający błędnie wyznaczy miejsca zerowe lub współrzędne wierzchołka paraboli, ale wykres funkcji ma trzy punkty wspólne z osią  $Ox$  i jest symetryczny względem osi  $Oy$  i konsekwentnie do popełnionego błędu poda liczbę rozwiązań równania.

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Podanie liczby rozwiązań na przykład w postaci:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (-\infty, -4) \\ 2 & \text{dla } m \in \{-4\} \cup (0, \infty) \\ 3 & \text{dla } m = 0 \\ 4 & \text{dla } m \in (-4, 0) \end{cases}$$

**Zadanie 6. (4 pkt)**

Wykaż, że nierówność  $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$  jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ .

**Rozwiązanie**

Obie strony nierówności  $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$  podnosimy do czwartej potęgi, uzyskując równoważną nierówność postaci:  $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$ , czyli  $\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} \geq 0$ . Stąd wnioskujemy, że dana w zadaniu nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ .

**Schemat oceniania:****Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**Doprowadzenie nierówności do postaci  $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**Doprowadzenie nierówności  $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}$  do postaci, z której łatwo wywnioskować, że jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ , np.  $\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} \geq 0$ .**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**Uwaga:

Mogą być rozwiązania, w których zdający od razu napisze, że średnia potęgowa stopnia 4 jest nie mniejsza od średniej kwadratowej (średniej potęgowej stopnia 2), bo im wyższy stopień, tym większa średnia. Należy wtedy przyznać 4 pkt.

**Zadanie 7. (5 pkt)**Objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego jest równa  $12\sqrt{3}$ , a pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.**Rozwiązanie:**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Objętość graniastoslupa jest równa

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H,$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = 3a \cdot H$$

Stąd i z treści zadania otrzymujemy układ równań

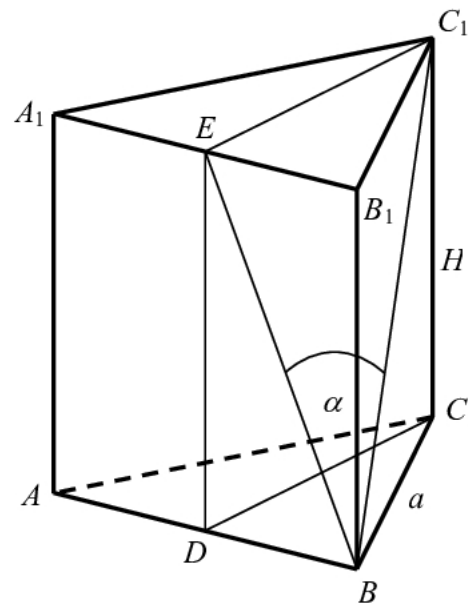
$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}$$

Obliczamy sinus kąta  $\alpha$  nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej: $\sin \alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCC_1$  mamy $|BC_1| = \sqrt{a^2 + H^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ , a ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego

$$|EC_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ więc } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$



**Schemat oceniania:**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie długości krawędzi graniastosłupa ( $a$ - krawędź podstawy,  $H$ - krawędź boczna):

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Rozwiązanie układu równań:  $\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Zapisanie  $\sin \alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$  (lub zapisanie  $\sin \alpha$  w innej równoważnej postaci np.  $\sin \alpha = \frac{h}{d}$ ,

$h$  – wysokość trójkąta,  $d$  – przekątna ściany bocznej).

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 5 pkt**

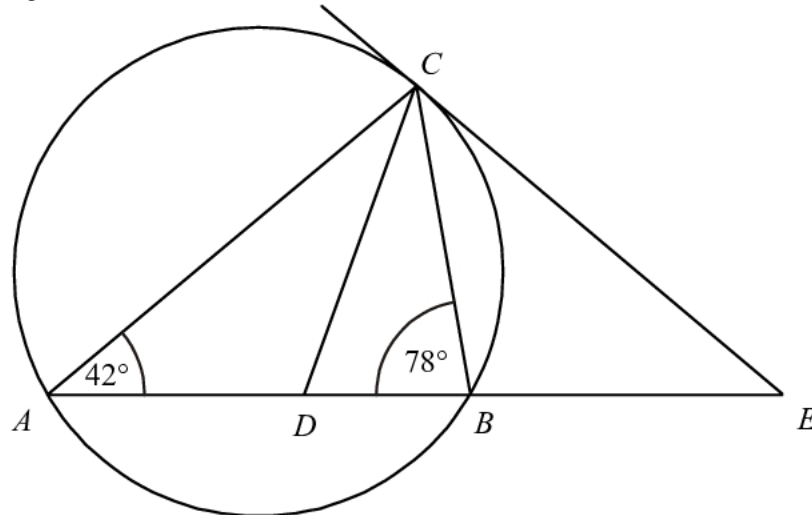
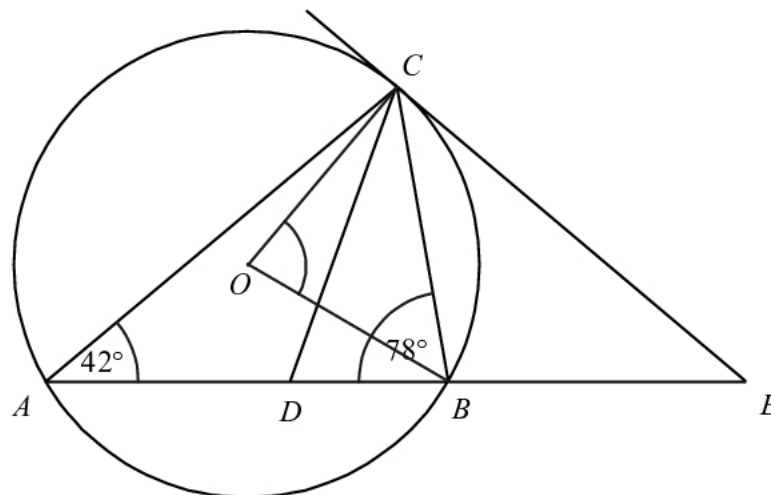
Obliczenie  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

Uwagi:

- Jeżeli zdający narysuje graniastosłup i zaznaczy na nim kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **1 punkt**.
- Jeżeli zdający nie zapisze układu równań lub zapisze go błędnie, ale określi  $\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + H^2}}$  (lub zapisze  $\sin \alpha$  w innej równoważnej postaci np.  $\sin \alpha = \frac{h}{d}$ ,  $h$  – wysokość trójkąta,  $d$  – przekątna ściany bocznej) i na tym poprzestanie, to przyznajemy **2 punkty**.
- Jeżeli zdający rozwiąże układ równań bezbłędnie i narysuje graniastosłup z zaznaczonym na nim kątem nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **3 punkty**.
- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to przyznajemy **4 punkty**.

**Zadanie 8. (4 pkt)**

Odcinek  $CD$  jest zawarty w dwusiecznej kąta  $ACB$  trójkąta  $ABC$ . Kąty trójkąta  $ABC$  mają miary:  $|\sphericalangle CAB| = 42^\circ$ ,  $|\sphericalangle ABC| = 78^\circ$ . Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie  $C$  przecina prostą  $AB$  w punkcie  $E$  (zobacz rysunek). Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta  $CDE$ .

**Rozwiązanie**

$$|\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} (180^\circ - 42^\circ - 78^\circ) = 30^\circ$$

$$|\sphericalangle CDE| = 180^\circ - (78^\circ + 30^\circ) = 72^\circ$$

Kąt  $COB$  jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt  $CAB$ , więc  $|\sphericalangle COB| = 84^\circ$ .

Trójkąt  $COB$  jest równoramienny stąd  $|\sphericalangle OCB| = 48^\circ$ .

$$|\sphericalangle BCE| = 90^\circ - |\sphericalangle OCB| = 42^\circ.$$

Do obliczenia miary tego kąta możemy też wykorzystać twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.

$$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BCE| = 30^\circ + 42^\circ = 72^\circ.$$

$$|\sphericalangle CED| = 180^\circ - (|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle DCE|) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Odpowiedź: Miary kątów trójkąta  $CDE$  to  $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$ ,  $|\sphericalangle DCE| = 72^\circ$ ,  $|\sphericalangle CED| = 36^\circ$ .

**Schemat oceniania:**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Obliczenie miary kąta  $CDE$ :  $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie miar kątów  $COB$  i  $OCB$ , gdzie  $O$  jest środkiem okręgu

$|\sphericalangle COB| = 84^\circ$ ,  $|\sphericalangle OCB| = 48^\circ$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie miary kąta  $BCE$ :  $|\sphericalangle BCE| = 42^\circ$ .

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Obliczenie miar kątów trójkąta  $CDE$ :  $|\sphericalangle CDE| = 72^\circ$ ,  $|\sphericalangle DCE| = 72^\circ$ ,  $|\sphericalangle CED| = 36^\circ$ .

**Zadanie 9. (4 pkt)**

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

**I sposób rozwiązania**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny,  $|\Omega| = 8!$ .

Zauważmy, że zdarzenie  $A$  - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.

Stąd  $|A| = 2 \cdot 4! \cdot 4!$  albo  $|A| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  i  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{35}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

- zdający obliczy  $|\Omega| = 8!$

albo

- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy  $|\Omega| = 8!$  i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający obliczy  $|\Omega| = 8!$  i  $|A| = 4! \cdot 4! \cdot 2$  albo  $|A| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.



**Rozwiązanie bezbłędne . . . . . 4 pkt**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego:  $P(A) = \frac{1}{35}$ .

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze  $|A| = 4! \cdot 4!$  i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo  $P(A) = \frac{1}{70}$ , to przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy albo nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy 3 punkty.

**II sposób rozwiązania**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  (numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste)). Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny,  $|\Omega| = \binom{8}{4}$ .

Zauważmy, że zdarzenie  $A$  - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.

Stąd  $|A| = 2$  i  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{35}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania . . . . . 1 pkt**

- zdający zauważy, że aby rozwiązać zadanie, wystarczy znać numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste) i obliczy  $|\Omega| = \binom{8}{4}$

albo

- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp . . . . . 2 pkt**

Zdający obliczy  $|\Omega| = \binom{8}{4}$  i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania . . . . . 3 pkt**

Zdający obliczy  $|\Omega| = \binom{8}{4}$  i  $|A| = 2$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie pełne** ..... **4 pkt**

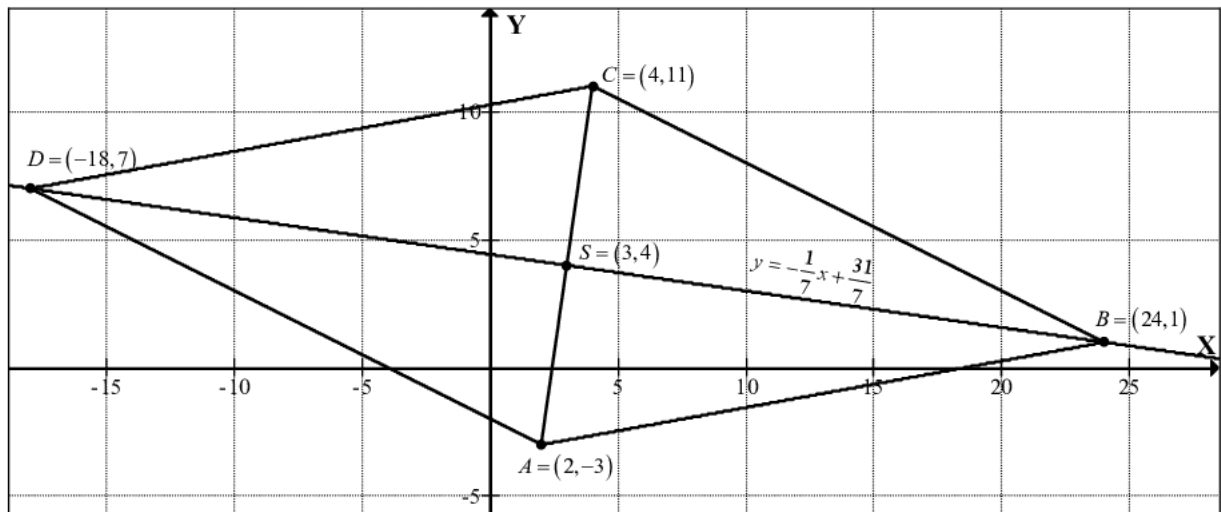
Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego:  $P(A) = \frac{1}{35}$ .

Uwagi:

- Jeżeli zdający zapisze  $|A|=1$  i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo  $P(A) = \frac{1}{70}$ , to przyznajemy **2 punkty**.
- Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy lub nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy **3 punkty**.

**Zadanie 10. (6 pkt)**

Punkt  $A = (2, -3)$  jest wierzchołkiem rombu  $ABCD$  o polu równym 300. Punkt  $S = (3, 4)$  jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

**I sposób rozwiązania** (środek symetrii rombu)

Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu  $A$  oraz środka symetrii rombu  $S$  obliczamy współrzędne punktu  $C$ .

$$x_s = \frac{x_A + x_C}{2} \quad y_s = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \quad y_C = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$$

Punkt  $C$  ma współrzędne  $(4, 11)$ .

Obliczamy długość przekątnej  $AC$ :  $|AC| = 10\sqrt{2}$ .

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej  $BD$ .

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot |BD| \quad |BD| = 30\sqrt{2}$$

Niech  $B = (x, y)$ ,  $|BS| = \frac{|BD|}{2} = 15\sqrt{2}$  oraz  $|BS| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$ . Punkt  $B$  leży na prostej o równaniu  $x + 7y = 31$ . Wyznaczam współrzędne punktów  $B$  i  $D$ :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ x+7y=31 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} (4-x)^2 + (11-y)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{31}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (31-7y-3)^2 + (y-4)^2 = 450 \\ x = 31-7y \end{cases} \quad (4-x)^2 + \left(11 + \frac{1}{7}x - \frac{31}{7}\right)^2 = 500$$

$$(28-7y)^2 + (y-4)^2 = 450 \quad 16 - 8x + x^2 + \frac{1}{49}(x^2 + 92x + 2116) = 500$$

$$7^2(4-y)^2 + (y-4)^2 = 450 \quad x^2 - 6x - 432 = 0$$

$$49(y-4)^2 + (y-4)^2 = 450 \quad x = -18 \text{ lub } x = 24$$

$$50(y-4)^2 = 450 \quad \begin{cases} y = 7 \\ x = -18 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 24 \end{cases}$$

$$(y-4)^2 = 9$$

$$y-4=3 \quad \text{lub} \quad y-4=-3$$

$$\begin{cases} y = 7 \\ x = -18 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 24 \end{cases}$$

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu:  $B = (24,1)$ ,  $D = (-18,7)$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Obliczenie współrzędnych wierzchołka  $C$  oraz długości przekątnej  $AC$  (lub jej połowy):

$$C = (4,11), |AC| = 10\sqrt{2} \quad (|AS| = 5\sqrt{2}).$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktów  $B$  i  $D$ :

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = (15\sqrt{2})^2 \\ x+7y=31 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Przekształcenie układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.

$$(28-7y)^2 + (y-4)^2 = 450$$

**Rozwiązanie pełne ..... 6 pkt**

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu:  $B = (24,1)$ ,  $C = (4,11)$ ,  $D = (-18,7)$ .

Odpowiedź: Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu:  $B = (24,1)$ ,  $C = (4,11)$ ,  $D = (-18,7)$ .

**II sposób rozwiązania** (iloczyn skalarny)

Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu  $A$  oraz środka symetrii rombu  $S$  obliczamy współrzędne punktu  $C$ .

$$x_S = \frac{x_A + x_C}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \quad y_C = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$$

Punkt  $C$  ma współrzędne  $(4, 11)$ .

Obliczamy długość przekątnej  $AC$ :  $|AC| = 10\sqrt{2}$ .

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej  $BD$ .

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot |BD| \quad |BD| = 30\sqrt{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku  $AD$ :

$$|AD|^2 = |AS|^2 + |SD|^2 \quad |AS| = \frac{1}{2}|AC|, \quad |SD| = \frac{1}{2}|BD|$$

$$|AD| = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (15\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{5}$$

Wyznaczamy współrzędne punktów  $B$  i  $D$  rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \overline{AS} \circ \overline{DS} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ [1, 7] \circ [3-x, 4-y] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ 31-x-7y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ 31-x-7y = 0 \end{cases}$$

$$50y^2 - 400y + 350 = 0$$

$$y_1 = 7 \quad y_2 = 1$$

$$\begin{cases} x = -18 \\ y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

**Odpowiedź:** Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne:  $B = (24, 1)$ ,  $C = (4, 11)$  i  $D = (-18, 7)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze**

**do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Obliczenie współrzędnych wierzchołka  $C$  oraz długości przekątnej  $AC$  (lub jej połowy):

$$C = (4, 11) \quad |AC| = 10\sqrt{2} \quad (|AS| = 5\sqrt{2}).$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości drugiej przekątnej  $|BD| = 30\sqrt{2}$  oraz długości boku rombu, np.

$$|AD| = 10\sqrt{5}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 pkt**

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu  $B$  ( $D$ ) i przekształcenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą:

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \vec{SA} \circ \vec{SD} = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 8y + 7 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 6x - 432 = 0.$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 5 pkt****Rozwiązanie bezbłędne ..... 6 pkt**

Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne:  $B = (24,1)$ ,  $C = (4,11)$  i  $D = (-18,7)$ .

**Zadanie 11(5 pkt)**

Ciąg  $(a, b, c)$  jest geometryczny i  $a + b + c = 26$ , zaś ciąg  $(a - 5, b - 4, c - 11)$  jest arytmetyczny. Oblicz  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**I sposób rozwiązania**

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie:  $b^2 = a \cdot c$ , a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie:  $2(b - 4) = (a - 5) + (c - 11)$ .

$$\text{Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań: } \begin{cases} 2(b - 4) = (a - 5) + (c - 11) \\ b^2 = a \cdot c \\ a + b + c = 26 \end{cases}.$$

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą:  $a^2 - 20a + 36 = 0$  lub  $c^2 - 20c + 36 = 0$ . Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy:  $a = 2$  lub  $a = 18$  oraz  $c = 2$  lub  $c = 18$ .

Odp. Warunki zadania spełniają liczby:  $a = 2, b = 6, c = 18$  lub  $a = 18, b = 6, c = 2$ .

**II sposób rozwiązania**

Oznaczamy: przez  $a$  – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez  $q$  – iloraz tego ciągu. Wówczas  $b = a \cdot q$ ,  $c = a \cdot q^2$ .

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 26 \\ 2(aq - 4) = (a - 5) + (aq^2 - 11) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 26 \\ aq^2 - 2aq + a - 8 = 0 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy:  $a = \frac{26}{1 + q + q^2}$ , zatem

$$\frac{26}{1 + q + q^2} \cdot q^2 - \frac{2 \cdot 26}{1 + q + q^2} \cdot q + \frac{26}{1 + q + q^2} - 8 = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie:  $3q^2 - 10q + 3 = 0$ . Rozwiązaniem tego równania są

liczby:  $q = \frac{1}{3}, q = 3$ .

Dla każdej z tych liczb obliczamy  $a, b, c$ .

Warunki zadania spełniają liczby:  $a = 2, b = 6, c = 18$  lub  $a = 18, b = 6, c = 2$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a \cdot c$

albo

- $2(b-4) = (a-5) + (c-11)$

albo

- $2(aq-4) = (a-5) + (aq^2-11)$

albo

- $a + aq + aq^2 = 26$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb  $a, b, c$ , np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b-4) = (a-5) + (c-11) \\ a+b+c = 26 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 26 \\ 2(a \cdot q - 4) = (a-5) + (a \cdot q^2 - 11) \end{cases}$$

### **Uwaga:**

Jeżeli zdający pomyli własności któregośkolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$a^2 - 20a + 36 = 0 \quad \text{lub} \quad c^2 - 20c + 36 = 0 \quad \text{lub} \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

### **Uwaga:**

Jeżeli w trakcie doprowadzania układu równań do równania kwadratowego zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje 2 punkty za całe zadanie.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań (na przykład dla  $q < 1$ ) i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste)

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 5 pkt**

$a = 2, b = 6, c = 18$  lub  $a = 18, b = 6, c = 2$ .

Uwaga:

Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże układ równań i popełni błąd w zredagowaniu odpowiedzi, na przykład:  $a = 2$  lub  $a = 18$ ,  $b = 6$ ,  $c = 18$  lub  $c = 2$ , to otrzymuje **4 punkty**.