

## **Próbny egzamin maturalny z matematyki listopad 2009**

### **Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych i przykładowe rozwiązania zadań otwartych**

## Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
odpowiedź	A	C	B	B	C	A	B	A	D	A	C	B	B	C	C	D	A	D	C	D	A	A	D	D	A

## Przykładowe rozwiązania zadań otwartych

### Zadanie 26. (2 punkty)

Rozwiąż nierówność  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ .

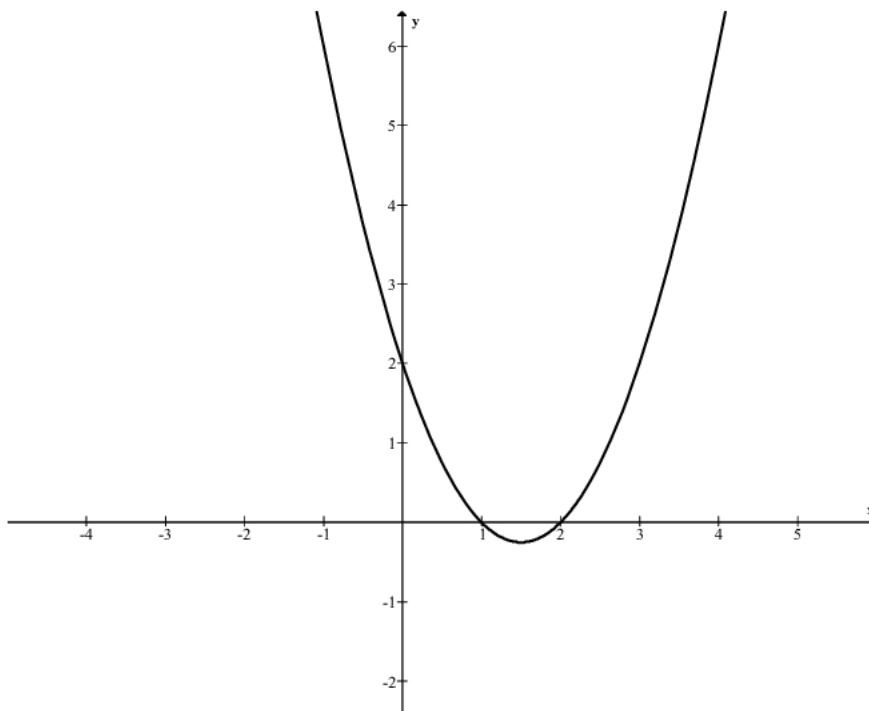
#### Rozwiązanie:

Obliczam miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \qquad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Rysuję fragment wykresu funkcji kwadratowej  $f$  i na jego podstawie odczytuję rozwiązanie nierówności:



Odpowiedź:  $x \in \langle 1, 2 \rangle$ .

Uwaga: Można przedstawić funkcję  $f$  w postaci  $f(x) = (x-1)(x-2)$  i odczytać rozwiązanie nierówności.

**Zadanie 27. (2 punkty)**

Rozwiąż równanie  $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$ .

**Rozwiązanie:**

Stosuję metodę grupowania, by przedstawić lewą stronę równania w postaci iloczynowej:

$$x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = x^2(x - 7) + 2(x - 7) = (x^2 + 2)(x - 7).$$

Z równania  $(x^2 + 2)(x - 7) = 0$  otrzymujemy, że

$$x^2 + 2 = 0 \text{ lub } x - 7 = 0.$$

Równanie  $x^2 + 2 = 0$  nie ma rozwiązań. Rozwiązaniem równania  $x - 7 = 0$  jest liczba 7.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem jest  $x = 7$ .

**Zadanie 28. (2 punkty)**

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty  $A = (2, 5)$  i  $C = (6, 7)$  są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu  $ABCD$ . Wyznacz równanie prostej  $BD$ .

**Rozwiązanie:**

Obliczam współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$ , a następnie wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej  $BD$  prostopadłej do  $AC$ :  $a_{BD} = -2$ .

Wyznaczam współrzędne środka  $S$  odcinka  $AC$ :  $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = (4, 6)$  i wyznaczam równanie prostej o współczynniku kierunkowym  $-2$ , przechodzącej przez punkt  $S$ .

Odpowiedź:  $y = -2x + 14$ .

**Zadanie 29. (2 punkty)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ . Oblicz  $\sin \alpha + \cos \alpha$ .

**Rozwiązanie:**

I sposób rozwiązania:

Z definicji funkcji tangens mamy  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$ , zatem  $\sin \alpha = \frac{4}{3} \cos \alpha$ . Podstawiam tę równość

do tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i otrzymuję  $\left(\frac{4}{3} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ , a stąd  $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ .

Zatem  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  lub  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . Ujemny wynik odrzucam, ponieważ zgodnie z warunkami

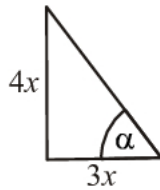
zadania kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym. Obliczam wartości funkcji  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , a następnie wartość

wyrażenia  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ .

Odpowiedź:  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ .

II sposób rozwiązania:

Rysuję trójkąt prostokątny, w którym oznaczam przyprostokątne  $3x$  i  $4x$  oraz zaznaczam kąt ostry  $\alpha$  tak, aby  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ .



Z twierdzenia Pitagorasa obliczam długość przeciwprostokątnej:  $(4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$ .

Zatem przeciwprostokątna ma długość  $5x$ . Obliczam wartości funkcji  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

i  $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ . Stąd  $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$ .

Odpowiedź:  $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ .

**Zadanie 30. (2 punkty)**

Wykaż, że dla każdego  $m$  ciąg  $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$  jest arytmetyczny.

**Rozwiązanie:**I sposób rozwiązania:

Wystarczy sprawdzić, że zachodzi następujący związek między sąsiednimi wyrazami

ciągu:  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ .

Mamy  $a_1 = \frac{m+1}{4}$ ,  $a_2 = \frac{m+3}{6}$ ,  $a_3 = \frac{m+9}{12}$ .

Zatem  $\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12}}{2} = \frac{3m+3+m+9}{24} = \frac{4m+12}{24} = \frac{m+3}{6} = a_2$ .

Stąd wynika, że ciąg  $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$  jest arytmetyczny dla każdego  $m$ .

II sposób rozwiązania:

Mamy  $a_1 = \frac{m+1}{4}$ ,  $a_2 = \frac{m+3}{6}$ ,  $a_3 = \frac{m+9}{12}$ .

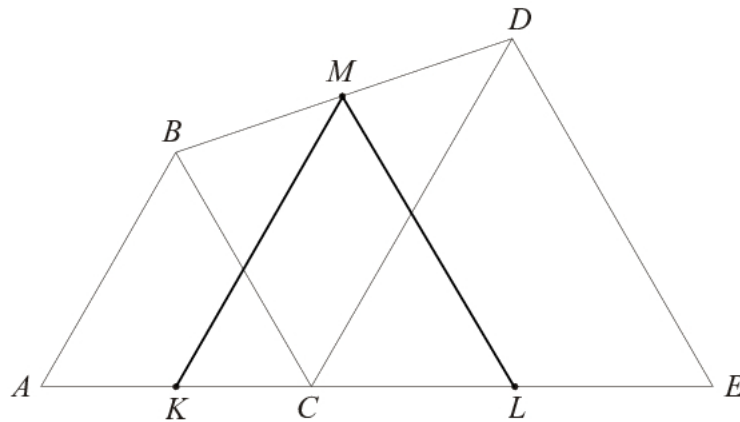
Wystarczy sprawdzić, że  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ .

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \frac{m+3}{6} - \frac{m+1}{4} &= \frac{m+9}{12} - \frac{m+3}{6} \\ \frac{2m+6-3m-3}{12} &= \frac{m+9-2m-6}{12} \\ \frac{-m+3}{12} &= \frac{-m+3}{12} \end{aligned}$$

**Zadanie 31. (2 punkty)**

Trójkąty  $ABC$  i  $CDE$  są równoboczne. Punkty  $A$ ,  $C$  i  $E$  leżą na jednej prostej. Punkty  $K$ ,  $L$  i  $M$  są środkami odcinków  $AC$ ,  $CE$  i  $BD$  (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty  $K$ ,  $L$  i  $M$  są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

**Rozwiązanie:**

Z warunków zadania wynika, że  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCE| = 60^\circ$ , więc odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe. Czworokąt  $ACDB$  jest trapezem. Odcinek  $KM$  łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego  $|\sphericalangle MKL| = 60^\circ$ .

Podobnie  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CED| = 60^\circ$ , więc odcinki  $BC$  i  $DE$  są równoległe. Czworokąt  $BCED$  jest trapezem. Odcinek  $ML$  łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego  $|\sphericalangle KLM| = 60^\circ$ .

Odpowiedź: Dwa kąty trójkąta  $KLM$  mają miarę  $60^\circ$ , zatem jest to trójkąt równoboczny.

**Zadanie 32. (5 punktów)**

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

**Rozwiązanie:**

Oznaczam:  $x$  – liczba stron przeczytanych każdego dnia,  $y$  – liczba dni.

Zapisuję i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x + 8) \cdot (y - 3) = 480 \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy  $x = \frac{480}{y}$ , zatem

$$\begin{aligned} \left(\frac{480}{y} + 8\right) \cdot (y - 3) &= 480 \quad | \cdot y \\ (480 + 8y)(y - 3) &= 480y \end{aligned}$$

Po uproszczeniu otrzymuję równanie  $y^2 - 3y - 180 = 0$ .

Rozwiązaniem równania są liczby:  $-12$  oraz  $15$ . Odrzucam ujemną liczbę dni.

Odpowiedź: Uczeń przeczytał książkę w ciągu 15 dni.

**Zadanie 33. (4 punkty)**

Punkty  $A = (2, 0)$  i  $B = (12, 0)$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego  $ABC$  o przeciwprostokątnej  $AB$ . Wierzchołek  $C$  leży na prostej o równaniu  $y = x$ . Oblicz współrzędne punktu  $C$ .

**Rozwiązanie:**I sposób rozwiązania:

Punkt  $C$  leży na prostej o równaniu  $y = x$  i na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej, a promień jest równy połowie długości tej przeciwprostokątnej.

Obliczam długość przeciwprostokątnej  $AB$ :  $|AB| = \sqrt{(12 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = 10$ .

Wyznaczam współrzędne środka przeciwprostokątnej:  $S = (7, 0)$ .

Zapisuję równanie okręgu:  $(x - 7)^2 + y^2 = 25$

Rozwiązuję układ równań 
$$\begin{cases} y = x \\ (x - 7)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby:  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 3$ .

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty:  $C = (4, 4)$  oraz  $C = (3, 3)$ .

II sposób rozwiązania:

Oznaczmy współrzędne punktu  $C$  przez  $(x, y)$ . Wtedy  $|AB| = \sqrt{(12 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = 10$ ,

$$|AC| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2}, \quad |BC| = \sqrt{(x - 12)^2 + (y - 0)^2}.$$

Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc spełniona jest równość  $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ , czyli  $(x - 2)^2 + y^2 + (x - 12)^2 + y^2 = 10^2$ .

Punkt  $C$  leży też na prostej o równaniu  $y = x$ , zatem aby obliczyć jego współrzędne, należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 + (x - 12)^2 + y^2 = 10^2 \\ y = x \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 + x^2 - 24x + 144 + x^2 = 100$$

$$4x^2 - 28x + 48 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty:  $C = (4, 4)$  oraz  $C = (3, 3)$ .

**Zadanie 34. (4 punkty)**

Pole trójkąta prostokątnego jest równe  $60 \text{ cm}^2$ . Jedna przyprostokątna jest o  $7 \text{ cm}$  dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczam:  $a, b$  – długości przyprostokątnych danego trójkąta.

Zapisuję układ równań

$$\begin{cases} a = b + 7 \\ \frac{1}{2} a \cdot b = 60 \end{cases}$$

Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą  $\frac{1}{2}(b+7)b = 60$ , którego pierwiastkami są liczby

$b = 8$  oraz  $b = -15$ .

Odrzucam ujemny pierwiastek, gdyż  $b$  jest długością odcinka. Zatem  $b = 8$ ,  $a = 8 + 7 = 15$ .

Teraz obliczam długość przeciwprostokątnej  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ .

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość  $17 \text{ cm}$ .