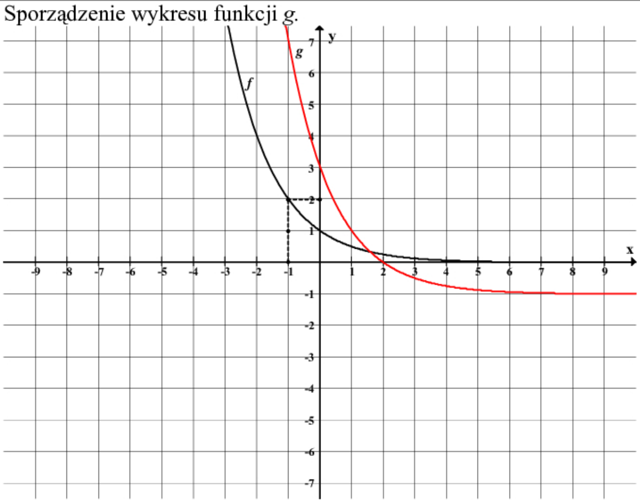
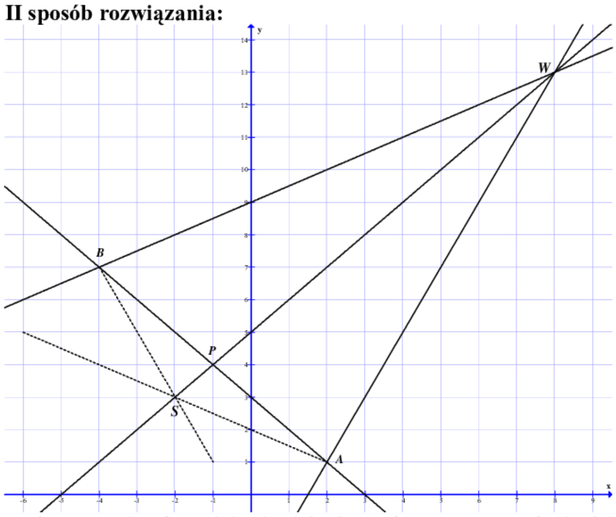
ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA – ZESTAW NR 2
POZIOM ROZSZERZONY

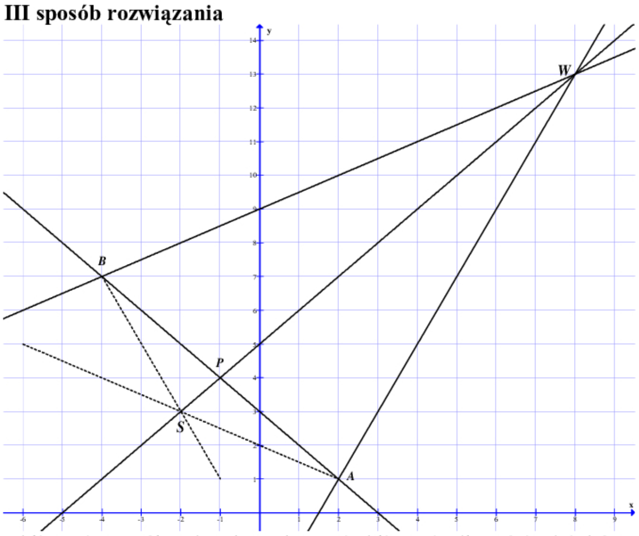
Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi
1	1.1	Wprowadzenie oznaczeń: x, $3x$, y – poszukiwane liczby i zapisanie równania: $4x+y=13$ lub: zapisanie poszukiwanych liczb z użyciem jednej zmiennej: x, $3x$, $13-4x$.	1	
	1.2	Zapisanie sumy kwadratów poszukiwanych liczb: $S=x^2+(3x)^2+y^2$ lub $S=x^2+(3x)^2+(13-4x)^2$	1	
	1.3	Zapisanie sumy kwadratów szukanych liczb jako funkcji jednej zmiennej: $S(x)=2x^2-8x+13$ gdy $x\in\left(0,\frac{13}{4}\right)$.	1	Zdający nie musi wyznaczyć dziedziny funkcji, o ile przeprowadzi rozwiązanie do końca i otrzyma trzy dodatnie liczby.
	1.4	Obliczenie argumentu, dla którego funkcja S przyjmuje wartość najmniejszą: $x_w=2$ i $x_w\in\left(0,\frac{13}{4}\right)$ więc funkcja S osiąga najmniejszą wartość dla $x=2$.	1	
	1.5	Podanie odpowiedzi: Poszukiwane liczby to : 2, 6, 5.	1	

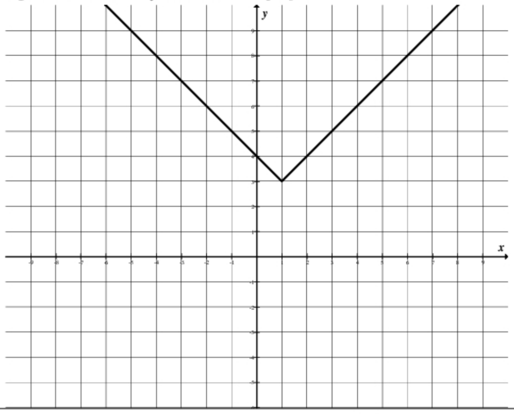
2	2.1	Sporządzenie wykresu funkcji *g*. 	1	
	2.2	Zapisanie podstawy *a* lub wzoru funkcji *f*: $a=\frac{1}{2}$ lub $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.	1	
	2.3	Zapisanie wzoru funkcji *g*: $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1$.	1	
	2.4	Podanie wszystkich argumentów, dla których $g(x)>0: x\in(-\infty,2)$.	1	

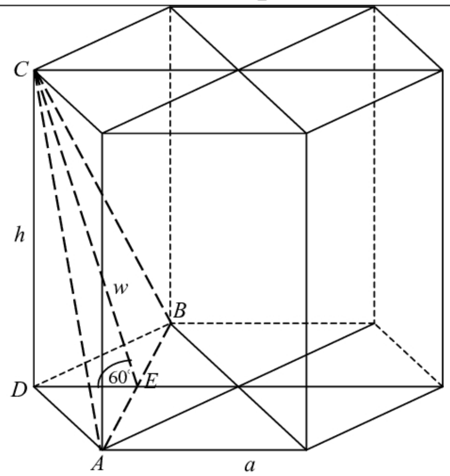
3	3.1	Wykorzystanie definicji rozwiązania równania lub twierdzenia o pierwiastkach wielomianu i zapisanie równania z niewiadomą *m*: $1^3+m^3\cdot 1^2-m^2\cdot 1-1=0$.	1	
	3.2	Obliczenie wszystkich wartości *m*, dla których liczba 1 jest rozwiązaniem równania (pierwiastkiem wielomianu): $m=0$ lub $m=1$.	1	
	3.3	Uzasadnienie, że dla $m=0$ równanie ma tylko jedno rozwiązanie $x=1$ (wielomian ma tylko jeden pierwiastek), np. dla $m=0$ równanie ma postać $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$, a trójmian x^2+x+1 nie ma pierwiastków.	1	
	3.4	Uzasadnienie, że dla $m=1$ równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie (wielomian ma więcej niż jeden pierwiastek), np. dla $m=1$ równanie ma postać $(x+1)^2(x-1)=0$, co oznacza, że liczba (-1) też jest jego rozwiązaniem.	1	
	3.1	**II sposób rozwiązania:** czynność 3.1, 3.2 Zapisanie równania w postaci iloczynu, np. $(x-1)(x^2+bx+c)=0$ i wykonanie mnożenia $x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c=0$.	1	
	3.2	Zastosowanie twierdzenia o równości wielomianów do zapisania układu warunków: $c=1$, $b=m^2+1$ i $b=m^3+1$ oraz rozwiązanie równania $m^3+1=m^2+1$: $m=0$ lub $m=1$.	1	
	3.1	**III sposób rozwiązania:** czynność 3.1, 3.2 Wykorzystanie twierdzenia o pierwiastkach wielomianu i wykonanie dzielenia wielomianu *W* przez dwumian $(x-1)$: $W(x)=(x-1)(x^2+(m^3+1)x+m^3-m^2+1)+(m^3-m^2)$,	1	
	3.2	Skorzystanie z twierdzenia o reszcie i obliczenie *m*: $m^3-m^2=0$ stąd $m=0$ lub $m=1$.	1	

4	4.1	Wykorzystanie w analizie zadania własności: promień okręgu jest prostopadły do stycznej w punkcie styczności.	1	
	4.2	Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x+9$: $y=-2x-1$.	1	
	4.3	Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$: $y=-\frac{1}{2}x+2$.	1	
	4.4	Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia prostych $y=-\frac{1}{2}x+2$ i $y=-2x-1$, który jest środkiem okręgu stycznego do danych prostych: $S=(-2,3)$.	1	
	4.5	Obliczenie promienia szukanego okręgu: $r=\left\|SA\right\|=\left\|SB\right\|=2\sqrt{5}$.	1	Jeśli zdający nie zapisał w punkcie 4.1 własności: promień okręgu jest prostopadły do stycznej w punkcie styczności, ale z niej skorzystał w rozwiązaniu, to przyznajemy punkt w czynności 4.1.

	4.1	**II sposób rozwiązania:**  Wykorzystanie własności – środek okręgu leży na symetralnej odcinka AB. Obliczenie współrzędnych punktów W – przecięcia się danych prostych oraz P – środka odcinka AB: $W=(8,13)$, $P=(-1,4)$.	1	
	4.2	Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkty W oraz P (symetralnej odcinka AB): $y=x+5$.	1	
	4.3	Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do prostej, na której leży ten punkt (lub prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prostej, na której leży ten punkt): $y=-2x-1$ lub $y=-\frac{1}{2}x+2$.	1	
	4.4	Obliczenie współrzędnych środka okręgu: $S=(-2,3)$.	1	
	4.5	Obliczenie promienia okręgu: $r=\|SA\|=\|SB\|=2\sqrt{5}$.	1	

	4.1	**III sposób rozwiązania**  Obliczenie współrzędnych punktu W i obliczenie długości odcinków AW i BW: $W=(8,13)$, $\lvert AW\rvert=\lvert BW\rvert=6\sqrt{5}$ (trójkąt AWB jest równoramienny).	1	
	4.2	Obliczenie współrzędnych punktu P (środka odcinka AB) oraz długości odcinków BP i PW: $P=(-1,4)$, $\lvert BP\rvert=3\sqrt{2}$, $\lvert PW\rvert=9\sqrt{2}$.	1	
	4.3	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów BWP i BSP.	1	
	4.4	Zapisanie proporcji $\frac{\lvert BS\rvert}{\lvert BP\rvert}=\frac{\lvert BW\rvert}{\lvert PW\rvert}$.	1	
	4.5	Obliczenie promienia okręgu: $r=\lvert AS\rvert=\lvert BS\rvert=2\sqrt{5}$.	1	

5	5.1	Zapisanie wzoru funkcji *f* w postaci : $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{dla } x\geq 1 \\ -x+4 & \text{dla } x<1 \end{cases}$.	1	
	5.2	Sporządzenie wykresu funkcji f : 	1	Jeśli zdający od razu poprawnie naszkicuje wykres funkcji *f*, to przyznajemy punkty w czynności 5.1 oraz 5.2.
	5.3	Podanie liczby rozwiązań równania $f(x)=m$: zero rozwiązań dla $m<3$, jedno rozwiązanie dla $m=3$, dwa rozwiązania dla $m>3$.	1	
6	6.1	Wprowadzenie oznaczeń, np.: *x*– liczba kupionych koszulek, *y* – cena koszulki oraz zapisanie równania: $x\cdot y=720$.	1	
	6.2	Zapisanie równania: $(x+5)(y-2)=720$.	1	
	6.3	Zapisanie równania kwadratowego w zależności od jednej niewiadomej, np. $x^2+5x-1800=0$ lub $y^2-2y-288=0$.	1	
	6.4	Rozwiązanie równania kwadratowego $x=40$ lub $x=-45$ ($y=18$ lub $y=-16$) i wybór właściwego rozwiązania, spełniającego warunki zadania.	1	
	6.5	Podanie odpowiedzi: $x=40$, $y=18$.	1	

7	7.1	Obliczenie długości przekątnej *BD* (leżącej naprzeciw kąta *DAB*): $\lvert BD\rvert = 2\sqrt{3}$.	1	
	7.2	Obliczenie miary kąta *C* leżącego naprzeciw kąta *A* (wykorzystanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa lub twierdzenia kosinusów): $\lvert\sphericalangle BCD\rvert = 90^\circ$.	1	
	7.3	Zapisanie pola *P* czworokąta *ABCD* jako sumy pól dwóch trójkątów, np.: $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD}$.	1	
	7.4	Obliczenie pola czworokąta *ABCD*: $P = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.	1	
8	8.1	 Zaznaczenie na rysunku kata $\alpha = 60^\circ$ – kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa. Przyjęcie oznaczeń, np.: a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa, w – wysokość trójkąta ABC, będącego rozważanym przekrojem graniastosłupa, h– wysokość graniastosłupa.	1	

	8.2	Wyznaczenie wysokości w z trójkąta prostokątnego CDE: $\left\|DE\right\| = \frac{a}{2}$ i z własności trójkąta CDE $w = 2\cdot\left\|DE\right\|$ stąd $w = a$.	1	
	8.3	Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $\left\|AB\right\| = a\sqrt{3}$, $a = 4$.	1	
	8.4	Obliczenie wysokości h graniastosłupa: $h = 2\sqrt{3}$.	1	
	8.5	Obliczenie objętości V graniastosłupa: $V = 144$.	1	
9	9.1	Przyjęcie metody prowadzącej do wyznaczenia zależności między bokami AB i BC trójkąta ABC (np. zapisanie pola trójkąta ABC na dwa sposoby lub zapisanie, że $\Delta ADB \sim \Delta CEB$).	1	
	9.2	Wyznaczenie zależności między bokami AB i BC trójkąt ABC: $\left\|AB\right\| = a$, $\left\|AC\right\| = \left\|BC\right\| = 2a$ lub $\left\|BC\right\| = 2\left\|AB\right\|$.	1	
	9.3	Obliczenie kosinusa kąta ABC, np. z trójkąta CEB: $\cos\left\|\sphericalangle ABC\right\| = \cos\left\|\sphericalangle CAB\right\| = \frac{1}{4}$.	1	Zdający nie musi zapisywać „podwójnej” równości. Wystarczy, że oznaczy tą samą literą kąty przy podstawie trójkąta.
	9.4	Wyznaczenie $\left\|BD\right\|$ z trójkąta ADB: $\frac{\left\|BD\right\|}{\left\|AB\right\|} = \cos\left\|\sphericalangle ABD\right\|$ stąd $\left\|BD\right\| = \frac{1}{4}\cdot\left\|AB\right\|$ oraz, $\left\|CD\right\| = \frac{7}{4}\left\|AB\right\|$.	1	
	9.5	Obliczenie kosinusa kąta BCA z trójkąta ADC: $\cos\left\|\sphericalangle BCA\right\| = \frac{\left\|CD\right\|}{\left\|AC\right\|} = \frac{7}{8}$.	1	
	9.4	**II sposób rozwiązania:** (czynności 10.4, 10.5) Zapisanie długości boków trójkąta ABC w zależności od jednej zmiennej, np.: $\left\|AB\right\| = a$, $\left\|AC\right\| = \left\|BC\right\| = 2a$. Obliczenie z tw. Pitagorasa w trójkącie ACE wysokości CE: $\left\|CE\right\| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$, oraz $\left\|AD\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left\|CE\right\| = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.	1	

	9.5	Obliczenie sinusa kąta DCA z trójkąta ADC: $\sin\left|\sphericalangle DCA\right| = \frac{\left|AD\right|}{\left|AC\right|} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.	1	
	9.4	**III sposób rozwiązania:** (czynności 10.4, 10.5) Przedstawienie metody pozwalającej obliczyć kosinus kąta przy wierzchołku C: np. z trójkąta prostokątnego ADC: $\cos\left|\sphericalangle DCA\right| = \frac{\left|DC\right|}{\left|AC\right|} = \frac{\left|DC\right|+\left|DB\right|-\left|DB\right|}{\left|DB\right|+\left|DC\right|} = 1-\frac{\left|DB\right|}{\left|DB\right|+\left|DC\right|}$ oraz wyznaczenie $\left|BD\right|$ z trójkąta ADB: $\left|BD\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|AB\right|$.	1	
	9.5	Obliczenie kosinusa kąta DCA: $\cos\left|\sphericalangle DCA\right| = \frac{7}{8}$.	1	
	9.4	**IV sposób rozwiązania:** (czynności 10.4, 10.5) Zastosowanie twierdzenia kosinusów i zapisanie, że $\left|AB\right|^2 = \left|AC\right|^2 + \left|BC\right|^2 - 2\cdot\left|AC\right|\cdot\left|BC\right|\cdot\cos\left|\sphericalangle BCA\right|$ $a^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2\cdot(2a)\cdot(2a)\cdot\cos\left|\sphericalangle BCA\right|$.	1	
	9.5	Obliczenie kosinusa kąta BCA: $\cos\left|\sphericalangle BCA\right| = \frac{7}{8}$.	1	
10	10.1	Wyznaczenie wyrazu a_{n+1}: $a_{n+1} = 3^{-n}$.	1	
	10.2	Obliczenie ilorazu ciągu (a_n): $q = 3^{-1}$ lub $q = \frac{1}{3}$.	1	Jeśli zdający od razu poda prawidłowo iloraz ciągu to otrzymuje również punkt w czynności 10.1
	10.3	Zapisanie sumy logarytmów: $S_{100} = \log_3 1 + \log_3 (3)^{-1} + \log_3 3^{-2} + ... + \log_3 3^{-99}$.	1	
	10.4	Zapisanie sumy logarytmów w postaci: $S_{100} = \log_3 3^{-(1+2+3+...99)} = \log_3 3^{50\cdot(-99)}$.	1	
	10.5	Obliczenie sumy stu początkowych wyrazów ciągu: $S_{100} = -4950$.	1	

11	11.1	Obliczenie mocy zbioru zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 6^3$.		
	11.2	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $\lvert A\rvert = 3^3$.	1	
	11.3	Obliczenie prawdopodobieństw zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$,	1	
	11.4	Stwierdzenie, że suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez trzy wtedy, gdy każda z wyrzuconych liczb będzie podzielna przez trzy albo gdy żadna z nich nie jest podzielnych przez trzy.	1	
	11.5	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *B* : $\lvert B\rvert = 2^3 + 4^3$ i prawdopodobieństwa tego zdarzenia *B*: $P(B) = \frac{2^3+4^3}{6^3} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.	1	Akceptujemy wynik w postaci ułamka skracalnego albo przybliżony, o ile tylko rozwiązanie zdającego wskazuje na poprawne obliczenie liczby $\lvert B\rvert$ i poprawne zastosowanie definicji prawdopodobieństwa.