Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

dysleksja ☐

MMA-R1A1P-062

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 12 – 21). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

ARKUSZ II

MAJ ROK 2006

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 12. (*5 pkt*)
Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór: $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \cdots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$.

Sprawdzam, czy wzór jest prawdziwy dla $n = 1$:

$L = 1 \cdot 3 \cdot 1! \quad P = (2!)^2 - 1$

$L = P$

Założenie indukcyjne:

$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \ldots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$ *dla* $n \geq 1$.

Teza:

$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \ldots + n(n+2)(n!)^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 = [(n+2)!]^2 - 1$

Dowód:

Korzystam z założenia indukcyjnego i otrzymuję

$L = [(n+1)!]^2 - 1 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 =$

$= [(n+1)!]^2 + (n+1)(n+3)[(n+1)!]^2 - 1$.

Wyłączam z pierwszych dwóch składników wyrażenia wspólny czynnik $[(n+1)!]^2$ *przed nawias*:

$L = [(n+1)!]^2 \cdot [1 + (n+1)(n+3)] - 1 = [(n+1)!]^2 \cdot (n^2 + 4n + 4) - 1 =$

$= [(n+1)!]^2 \cdot (n+2)^2 - 1$.

Korzystam z równości : $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$ *i otrzymuję*

$L = [(n+1)!(n+2)]^2 - 1 = [(n+2)!]^2 - 1 = P$.

wniosek: Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	12.1.	12.2.	12.3.	12.4.	12.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.

a)

Aby określić monotoniczność ciągu obliczam różnicę $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+11}{10(n+2)} - \frac{5n+6}{10(n+1)} =$$

$$= \frac{(5n+11)(n+1) - (5n+6)(n+2)}{10(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{5n^2 + 5n + 11n + 11 - 5n^2 - 10n - 6n - 12}{10(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-1}{10(n+1)(n+2)}$$

$\dfrac{-1}{10(n+1)(n+2)} < 0$ *dla każdej liczby naturalnej, zatem ciąg jest malejący.*

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{10(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{10n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{6}{n}}{10+\frac{10}{n}} = \frac{1}{2}$$

c)

Ciąg jest malejący, więc najmniejszą liczbą, która spełnia nierówność $a_n \leq b$ *jest pierwszy wyraz tego ciągu, czyli* $b = \dfrac{11}{20}$, *natomiast największą liczbą spełniającą nierówność* $a \leq a_n$ *jest granica tego ciągu, czyli* $a = \dfrac{1}{2}$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	13.1.	13.2.	13.3.	13.4.	13.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

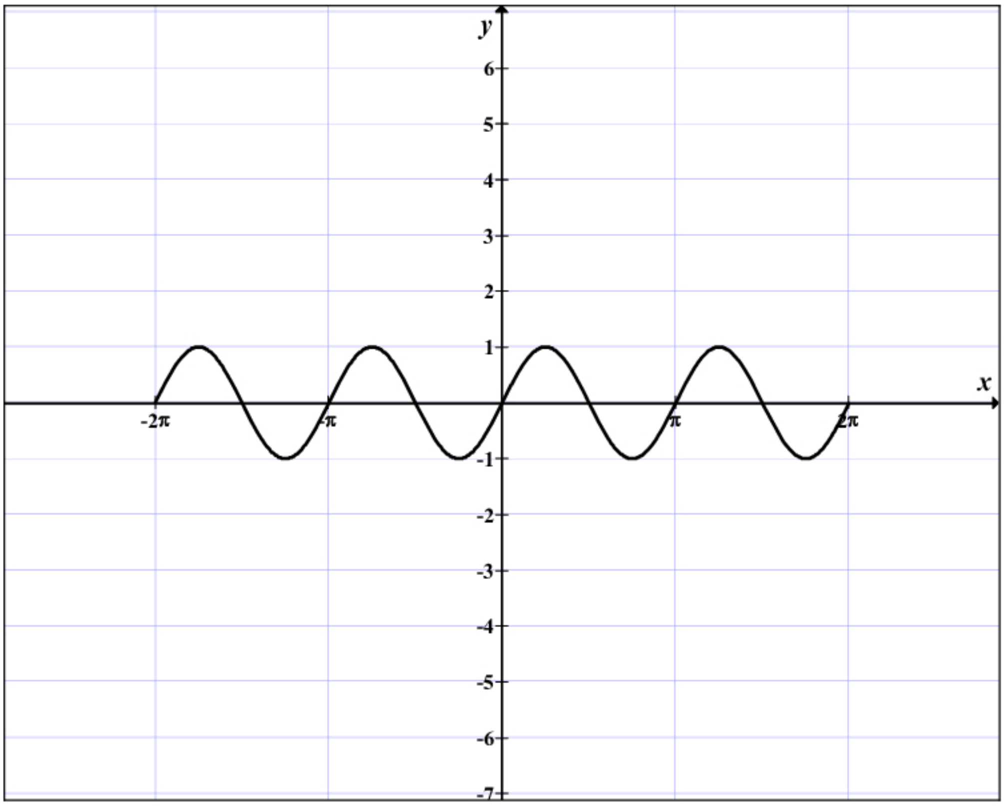
Zadanie 14. (*4 pkt*)

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

a)



b)

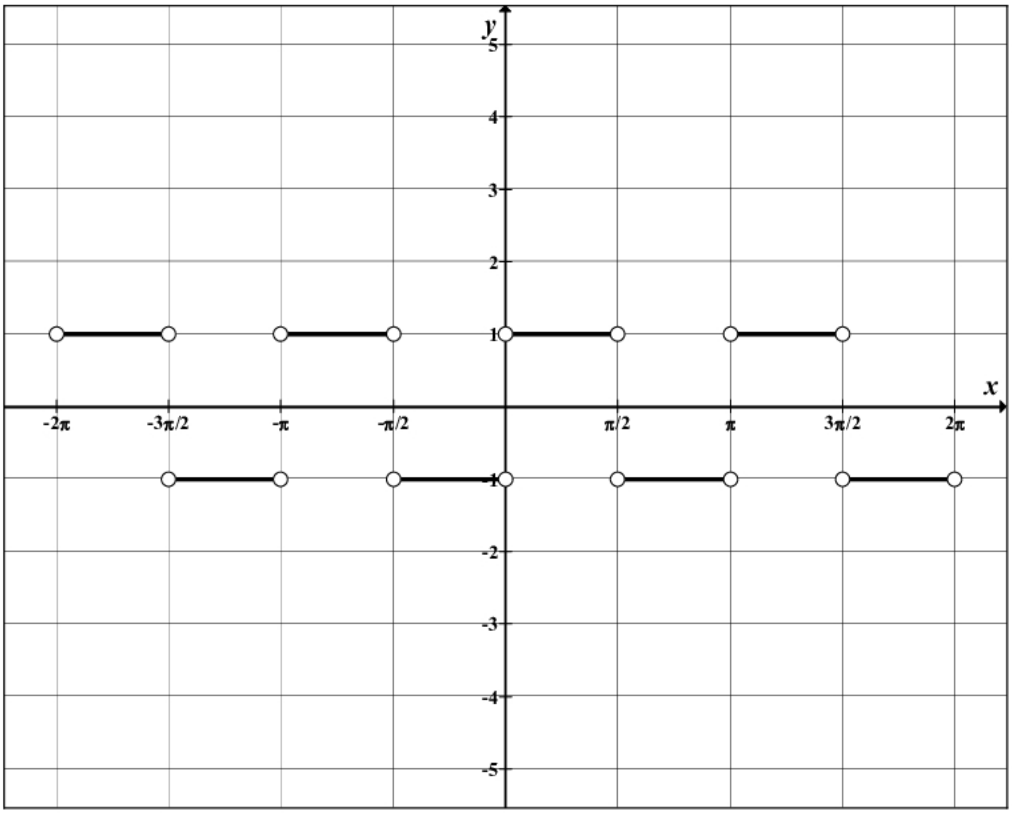
Wyznaczam dziedzinę funkcji $y = \dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$:

$\sin 2x \neq 0$ *dla* $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Przekształcam wzór funkcji:

$$y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} = \begin{cases} 1 & dla \quad \sin 2x > 0 \\ -1 & dla \quad \sin 2x < 0 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} 1 & dla \quad x\in\left(-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right) \\ -1 & dla \quad x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right) \end{cases}$$



Odp.: Rozwiązaniem nierówności $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}<0$

jest zbiór: $\left(-\frac{3\pi}{2},-\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	14.1.	14.2.	14.3.	14.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Wprowadzam następujące oznaczenia zdarzeń:

A - autobus prowadzi kierowca A,

B - autobus prowadzi kierowca B,

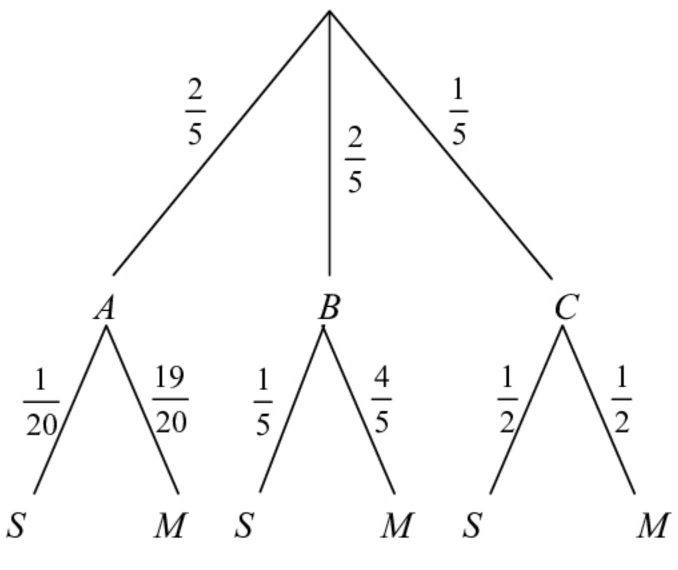
C - autobus prowadzi kierowca C,

S - autobus szkolny spóźnia się,

M - autobus przyjeżdża punktualnie.

Zdarzenia A, B, C spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, więc:

$$P(S) = P(S|A)\cdot P(A) + P(S|B)\cdot P(B) + P(S|C)\cdot P(C).$$



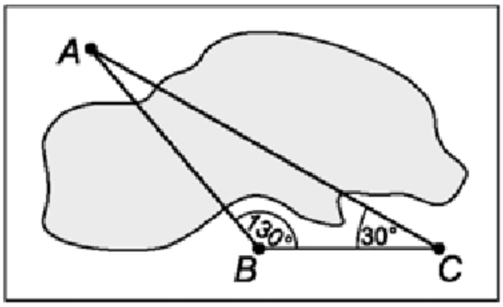
Obliczam prawdopodobieństwo:

$$P(S) = \frac{1}{20}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	15.1.	15.2.	15.3.	15.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 16. (*3 pkt*)

Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



$|\sphericalangle CAB| = 20^\circ$, *ponieważ suma kątów w trójkącie jest równa* 180°.

Do wyznaczenia szukanej odległości stosuję twierdzenie sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{\sin 20^\circ}.$$

Obliczam odległość obiektu A od obiektu B:

$$|AB| = \frac{200}{\sin 20^\circ} \approx \frac{200}{0{,}342} \approx 584{,}8$$

Odp.: Odległość obiektów w linii prostej jest równa 585 metrów.

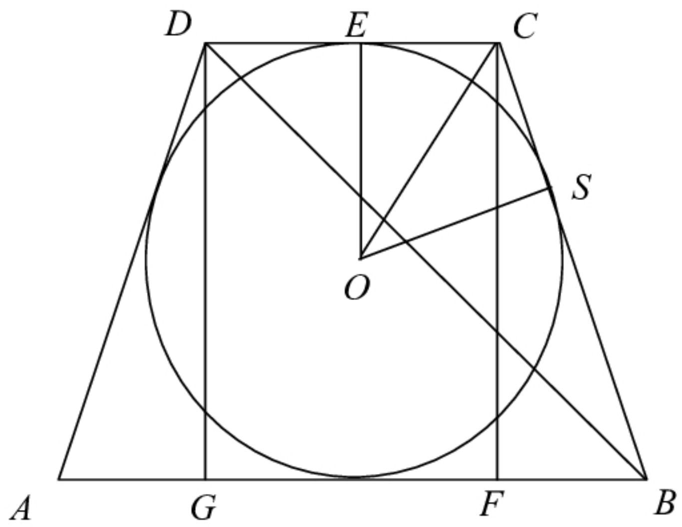
<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator!</td><td>Nr czynności</td><td>16.1.</td><td>16.2.</td><td>16.3.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 17. (*6 pkt)*

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|}=\frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

b) Oblicz cosinus $|\sphericalangle CBD|$.



Przyjmuję oznaczenia jak na rysunku.

a) Wykorzystując proporcję $\frac{|CS|}{|SB|}=\frac{2}{5}$ *wprowadzam oznaczenia:*

$|CS|=2x$, $|SB|=5x$, *stąd* $|BC|=2x+5x=7x$.

$\Delta OSC \equiv \Delta OEC$ *więc* $|EC|=|CS|=2x$.

$|DC|=4x$ *- z własności trapezu równoramiennego.*

Korzystając z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymuję:

$|AB|+|CD|=2\cdot|BC|=14x$, *stąd* $|AB|=10x$.

Z własności trapezu równoramiennego wynika, że $|FB|=3x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla ΔFBC otrzymuję:

$|CF|^2+|FB|^2=|CB|^2$, *czyli* $(2r)^2+(3x)^2=(7x)^2$, $r^2=10x^2$, *stąd* $x=\frac{\sqrt{10}}{10}r$,

więc $|BC|=\frac{7\sqrt{10}}{10}r$, $|DC|=\frac{4\sqrt{10}}{10}r$.

b)

Wyznaczam długość przekątnej BD z trójkąta prostokątnego BDG, w którym

$|GB| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r$:

$|GB|^2 + |GD|^2 = |DB|^2$,

$|DB|^2 = \frac{490r^2}{100} + 4r^2 = \frac{490r^2 + 400r^2}{100}$, *stąd* $|BD| = \frac{\sqrt{890}}{10}r$.

Stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie BCD otrzymuję:

$|DC|^2 = |BC|^2 + |DB|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |DB| \cdot \cos|\sphericalangle CBD|$,

$\left(\frac{4\sqrt{10}}{10}r\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{10}}{10}r\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{890}}{10}r\right)^2 - 2 \cdot \frac{7\sqrt{10}}{10}r \cdot \frac{\sqrt{890}}{10}r \cdot \cos|\sphericalangle CBD|$.

Odp.: $\cos|\sphericalangle CBD| = \frac{61\sqrt{89}}{623}$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	17.1.	17.2.	17.3.	17.4.	17.5.	17.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 18. (*7 pkt*)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

Wprowadzam następujące oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość graniastosłupa.

Dla tak wprowadzonych oznaczeń wzory na objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa są następujące:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah.$$

Z równania $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = 2$ *wyznaczam niewiadomą h:* $h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}$.

Po podstawieniu h do wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa otrzymuję funkcję:

$$P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3a^2} = \frac{a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right), \quad a \in (0, \infty).$$

Obliczam pochodną funkcji: $P'(a) = \sqrt{3} \cdot \frac{a^3 - 8}{a^2}, \quad a \in (0, \infty)$.

Dla $a = 2$ *pochodna funkcji przyjmuje wartość* 0.

$P'(a) \le 0$ *dla* $a \in (0, 2\rangle$ *i* $P'(a) \ge 0$ *dla* $a \in \langle 2, \infty)$, *więc w punkcie* $a = 2$ *funkcja* P *osiąga minimum i jednocześnie wartość najmniejszą, bo funkcja P w przedziale* $(0, 2\rangle$ *jest malejąca i w przedziale* $\langle 2, \infty)$ *jest rosnąca.*

Dla $a = 2$ *wysokość* $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Odp.: Wymiary graniastosłupa o objętości $2\,m^3$, *dla którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze są następujące:* $a = 2\,m$, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,m$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	18.1.	18.2.	18.3.	18.4.	18.5.	18.6.	18.7.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt							

Zadanie 19. (*7 pkt*)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru *k*, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Wyrażenie: $\log_2(k-2)$ *jest określone, gdy* $k-2>0 \Leftrightarrow k>2$.

Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że iloraz $q = \log_2(k-2)$.

$q \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(k-2) \neq 0$ *czyli* $k \neq 3$.

Aby istniała suma wszystkich wyrazów danego ciągu geometrycznego, iloraz ciągu musi spełniać warunek $|q|<1 \Leftrightarrow |\log_2(k-2)|<1$.

Rozwiązuję nierówność: $|\log_2(k-2)|<1$,

$$\log_2(k-2) > -1 \quad i \quad \log_2(k-2) < 1$$

$$\log_2(k-2) > \log_2 \frac{1}{2} \quad i \quad \log_2(k-2) < \log_2 2$$

$$k-2 > \frac{1}{2} \quad i \quad k-2<2$$

$$k > \frac{5}{2} \quad i \quad k<4$$

Rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$.

Odp.: Suma wszystkich wyrazów danego ciągu o wszystkich wyrazach różnych od zera istnieje dla $k \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3,4)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	19.1.	19.2.	19.3.	19.4.	19.5.	19.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	2	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 20. (*4 pkt*)

Dane są funkcje $f(x)=3^{x^2-5x}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$.

Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

Warunki zadania są równoważne nierówności: $3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$.

Rozwiązuję nierówność: $3^{x^2-5x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$

$$3^{x^2-5x} > \left(3^{-2}\right)^{-2x^2-3x+2}$$

$$3^{x^2-5x} > 3^{4x^2+6x-4}$$

Korzystając z monotoniczności funkcji wykładniczej otrzymuję nierówność równoważną:

$$x^2-5x > 4x^2+6x-4$$

$$-3x^2-11x+4>0$$

$\Delta=169$, $\quad x_1=\frac{11-13}{-6}=\frac{1}{3}$, $\quad x_2=\frac{11+13}{-6}=-4$.

Odp.: Rozwiązaniem nierówności jest przedział: $\left(-4,\frac{1}{3}\right)$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	20.1.	20.2.	20.3.	20.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 21. (*5 pkt*)

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

– jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
– f jest funkcją nieparzystą,
– f jest funkcją ciągłą

oraz:

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,

$f'(-3) = f'(-1) = 0$,

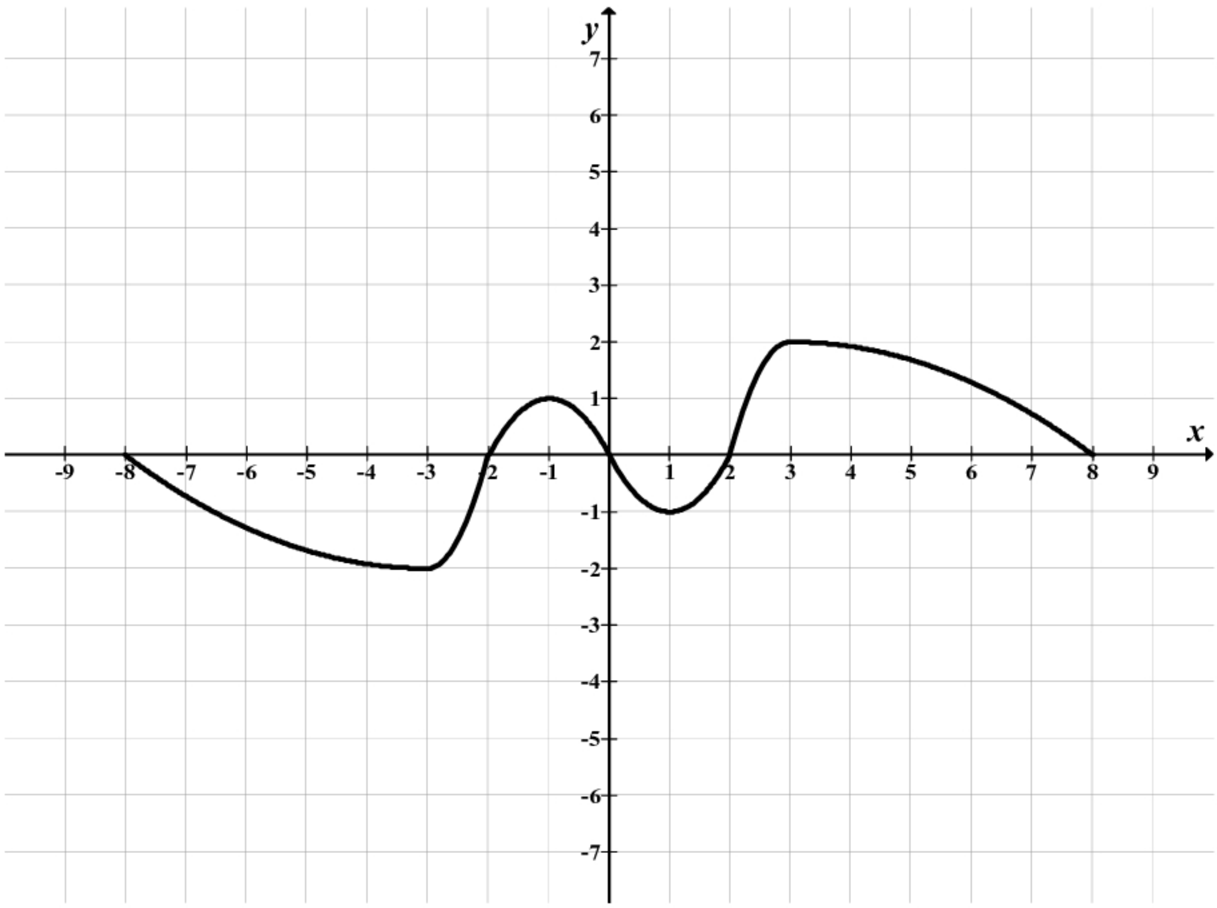
$f(-8) = 0$,

$f(-3) = -2$,

$f(-2) = 0$,

$f(-1) = 1$.

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	21.1.	21.2.	21.3.
	Maks. liczba pkt	1	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

BRUDNOPIS